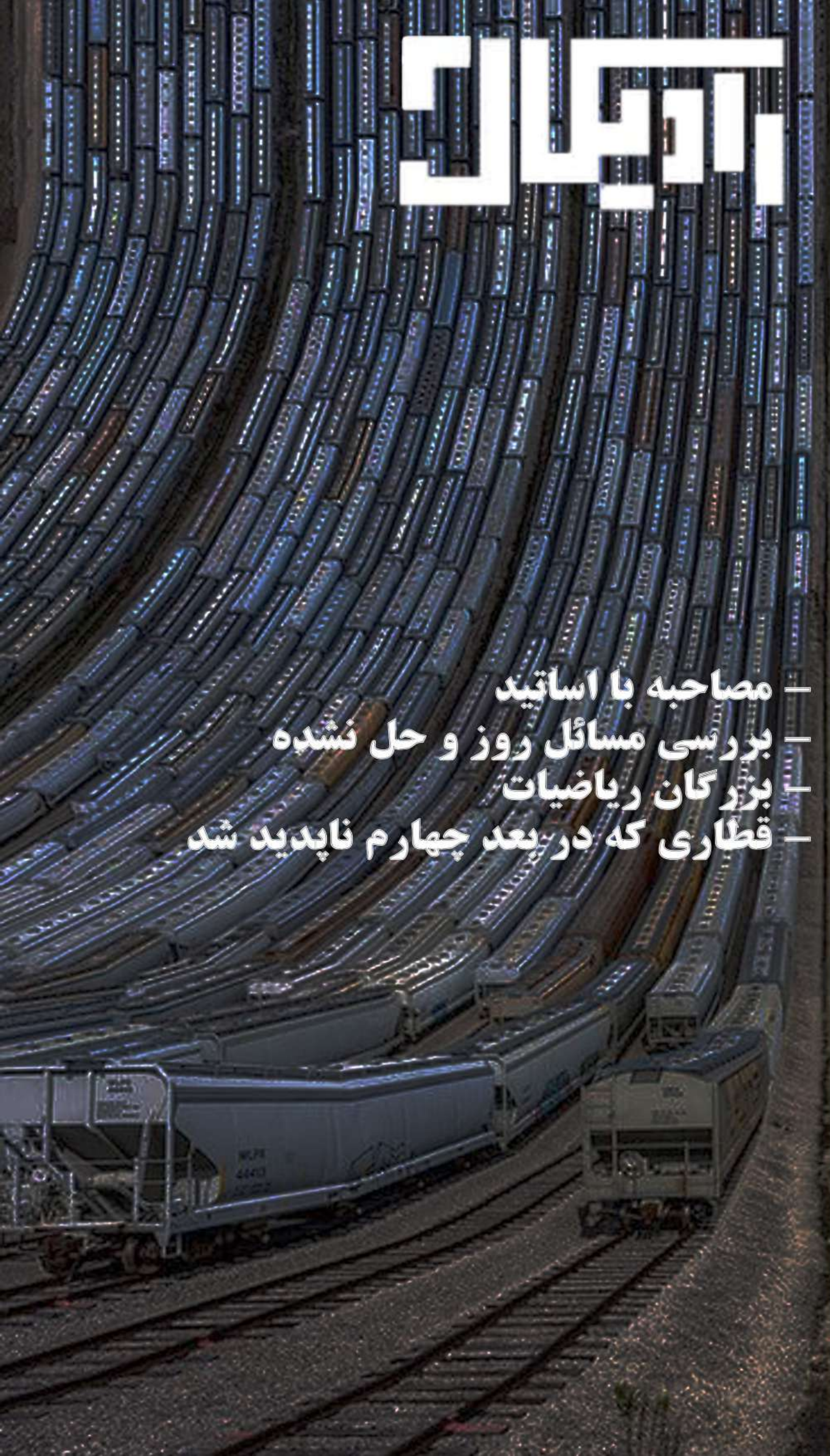
رادیکال



فصلنامه ریاضی
شماره پانزدهم
زمستان ۱۴۰۰

- مصاحبه با اساتید
- بررسی مسائل روز و حل نشده
- بزرگان ریاضیات
- قطاری که در بعد چهارم ناپدید شد

رادیکال احتمال

رادیکال آنالیز

رادیکال بهینه‌سازی

رادیکال گراف

رادیکال هندسه

رادیکال جبر

رادیکال سرگرمی

رادیکال
فصلنامه ریاضی
شماره پانزدهم
زمستان ۱۴۰۰

صاحب امتیاز:
مبینا مجاوری
انجمن علمی دانشجویی ریاضی دانشگاه الزهرا (س)

ناظر علمی:
سرکار خانم دکتر آهنگری

مدیر مسئول:
نگار سلیمانی

سردبیر:
زهرا حسینمردی

ویراستار: آرزو رنجبرنژاد اصفهانی

سخن سردبیر

بسم الله الرحمن الرحیم

دوست من سلام

عقربه زمان چرخید و چرخید تا دوباره سالی را تجربه کنیم. ثانیه ها به اسفند رسیدند تا دوباره سالی را گذرانده و سالی نو را آغاز کنیم، تا دوباره به یاد آوریم بهار پس از زمستان را و حیات پس از مرگ را و یاد آوریم قدرت بی نظیر الهی را. در آستانه آغاز سال جدید خورشیدی قرار گرفتیم با کوله باری از تجربه، امید به آینده و تصمیم های بزرگ برای سال جدید.

مجله رادیکال دو نیز در این اسفند، بعد از سال‌ها خاموشی دوباره روشن شد!

و برای روشن شدن آن زمان و زحمات بسیاری کشیده شده است و در این راه اگر کمک دانشجویان پر تلاش و همدل نبود هیچگاه نمیشد دوباره توانست مجله را شلعه ور کرد و از زحمت همه آن ها متشکرم و گروه رادیکال دو از اساتید دلسوز و مهربان به ویژه از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر لاله، سرکار خانم دکتر تجویدی، جناب آقای دکتر بهمردی،سرکار خانم دکتر آهنگری، جناب آقای دکتر منبتی و سرکار خانم دکتر هادیان که در این راه مانند شمعی نور ریاضی را در دل ما زنده نگه داشتند و وجود ما را از علم شیرین ریاضی شلعه ور ساختن بسیار سپاس گزاریم.

امید دارم شما هم وقتتان را به رادیکال دو بدهید و رادیکال دو هم بتواند برای شما

مُثمر ثمر باشد که این خوشحالی مارا به ارمغان می اورد

و سخن آخر، رادیکال دو منتظر نظرات و پشنهادات شما عزیزان هست

و خواهان دوست که شما می‌توانید هر کدامتان بهترین دوست او باشید و برای رشد و

روشن نگه داشتن او کمک کنید.

پس برای همکاری، نظرات و پیشنهادات به ایمیل زیر پیام دهید؛ منتظرتان هستیم!

SJ.Radical2@gmail.com

سعدی میگوید:

نگه دار فرصت که عالم دمی است	دمی پیش دانا به از عالمی است
سکندر که بر عالمی حکم داشت	در آن دم که می رفت عالم گذاشت

همچنین برای مشاهده رفرنس ها و مقالات استفاده شده در این مجله و خواندن مطالب بیشتر به کانال تلگرامی نشریه به نشانی radical2@ مراجعه شود .

سردبیرمجله

زهرا حسینمردی

بسمه تعالی

((و کلیدهـای خزائـن غیـب نـزد اوسـت، کسـی جـز او بـر آن آگاه نیسـت و نیـز آنچـه در خشـکی و دریاسـت همـه را مـی دانـد و هیـچ برگـی از درخـت نمـی افتـد، مگـر آنکـه او آگاه اسـت و نـه هیـچ دانـه ای در زیـر تاریکـی هـای زمیـن و نـه هیـچ تـر و خشـکی، جـز آنکـه در کتابـی مبیـن مسـطور اسـت.)) (سـوره انعـام، آیـه ۵۹).

سـپاس خداونـد متعـال را کـه توفیقـی عنایـت فرمـود تـا پـس از پیگیـری هـای فـراوان و طـی مراحـل گوناگـون، سـرانجام پـس از وقفـه ای طولانـی، نشـریه دانشـجویی رادیـکال دو را تقدیـم بـه علاقـه منـدان حـوزه ریاضیـات نماییـم. مجلهـای دانشـجویی کـه مصمـم اسـت بـا همـکاری دانشـجویان مسـتعد و اسـاتید فرهیختـه، بـه صـورت مسـتمر انتشـار یافتـه و در فضایـی بیـن رشـتهای و در عیـن حـال تخصصـی و علمـی پژوهشـی، مسـائل و چالـش هـای متنـوع دانـش برجسـته ریاضیـات را در حـوزه هـای مختلـف، مـورد واکاوی علمـی و تأمـلات عالمانـه قـرار دهـد.

اینجانـب، بـه عنـوان اسـتاد راهنمـای انجمـن علمـی دانشـجویی ریاضـی، صمیمانـه اذعـان مـی دارم کـه آغـوش مجلـه رادیـکال دو، هـم اینـک بـه روی تمامـی اندیشـمندان و علاقـه منـدان بـه دانـش ژرف ریاضیـات بـاز اسـت و مـا دسـت جملگـی همراهـان گرانقـدر را بـه گرمـی مـی فشـاریم. در واقـع، مفتخـرم بـه اینکـه از تمامـی اسـاتید، دانشـجویان و پژوهشـگران عزیـز رشـته هـای گوناگـون دعـوت کنـم تـا در یـک همـکاری پایـدار، در راسـتای ارتقـای کیفـی و غنـای علمـی هـر چـه بیشـتر نشـریه دانشـجویی رادیـکال دو مسـاعدتً نماینـد. سـعی بنـده و دانشـجویان پرتـلاش انجمـن علمـی دانشـجویی ریاضـی ایـن بـود کـه نشـریه ای صرفـاً دانشـجویی و در عیـن حـال، برخـوردار از اعتبـار علمـی در شـأن دانشـگاه الزهـرا انتشـار داده تـا بـا اسـتعانت از حضـرت حـق، در چشـم انـداز آتـی، رادیـکال دو بـه سـطحی ارتقـا یابـد تـا بتوانـد بـه شـیوه ای اسـتاندارد و بیـن المللـی، ضمـن جلـب توجـه و همـکاری صاحـب نظـران و پژوهشـگران حـوزه هـای مختلـف ریاضیـات از دیگـر دانشـگاهها، نگـره هـای بدیعـی را در سـطح نشـریات دانشـجویی کشـور عرضـه نمایـد.

در پایـان، برخـود لازم مـی دانـم کـه از معاونـت فرهنگـی و اجتماعـی دانشـگاه الزهـرا، کـه زمینـه سـاز و حامـی انتشـار ایـن مجلـه هسـتند، نهایـت قدردانـی را داشـته باشـم. همچنیـن، صمیمانـه تریـن درودهـا و سـپاس را تقدیـم اعضـای محتـرم هیـأت تحریریـه و همـکاران اجرایـی سـخت کـوش و پرتـوان نشـریه مـی نمایـم کـه بـدون شـک، بـدون زحمـات بـی دریـغ و تـلاش هـای بـی وقفـه و حضـور بـا انگیـزه ایـن عزیـزان، انتشـار ایـن نسـخه از رادیـکال دو محقـق نمـی گردیـد. از تمامـی اسـاتید و دانشـجویان گرانقـدر کـه سـخاوتمندانه، زمـان خـود را در اختیـار مجلـه گذاشـتند، کمـال تشـکر را دارم.

امیـدوارم، خداونـد متعـال، بـه بنـده و اعضـای محتـرم انجمـن علمـی دانشـجویی ریاضـی، توفیـق دهـد تـا روز بـه روز، نشـریه رادیـکال دو را بـه چشـم انـداز ممتازتریـن نشـریات دانشـجویی کشـور نزدیـک نمـوده و نقشـی هـر چنـد کوچـک، در راسـتای انتشـار دانـش ژرف ریاضیـات ایفـا نماییـم. صمیمانـه انتقـادات و پیشـنهادات خواننـدگان عزیـز را پذیـرا خواهیـم بـود. باشـد کـه در ارتقـای کیفـی نشـریه مثمـر ثمـر واقـع گـردد. امیـد اسـت توانسـته باشـیم گامـی هـر چنـد انـدک، در مسـیر اعتـلای علمـی دانشـگاه و جامعـه برداریـم.

با احترام و آرزوی موفقیت و سلامتی.

دکتر فاطمه آهنگری

عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه الزهرا

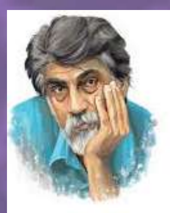
استاد راهنمای انجمن علمی دانشجویی ریاضی

((عصر جدید - ما در عصر احتمال به سر می‌بریم))

شاعر: قیصر امین پور

عصر جدید

ما در عصر احتمال به سر می‌بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
اما من
بی نام تو
حتی
یک لحظه احتمال ندارم
چشمان تو
عین الیقین من
قطعیت نگاه تو
دین من است
من از تو ناگزیرم
من
بی نام ناگزیر تو می‌میرم



قیصر امین پور
(زاده ۲ اردیبهشت ۱۳۳۸ - درگذشته ۸ آبان ۱۳۸۶)
محل تولد: گتوند

بررسی دو مسئله روز شاخه احتمال ریاضیات

از مسئله کوتاه‌تر شروع می‌کنیم:

پارادوکس جنسیت

مسئله تعیین جنسیت یکی از مسائل معروف نظریه احتمالات است که صورت آن به شرح زیر است:

- یک خانواده دارای دو فرزند است و فرزند بزرگتر پسر است. احتمال اینکه فرزند کوچکتر دختر باشد چه قدر است؟
- یک خانواده دارای دو فرزند است و حداقل یکی از آنها پسر است. احتمال اینکه این خانواده دارای فرزند دختر باشد چه قدر است؟ (یا به بیان دیگر: یک خانواده دارای دو فرزند است و یکی از آنها پسر است. احتمال اینکه دیگری دختر باشد چه قدر است؟)

بررسی دقیق این دو سؤال (که در نگاه اول مشابه به نظر می‌رسند) ما را به پاسخ‌های متفاوتی می‌رساند.

فرضیه‌ها

به‌طور کلی چهار ترکیب ممکن برای جنسیت فرزندان وجود دارد:

فرزند بزرگتر	فرزند کوچکتر
دختر	دختر
دختر	پسر
پسر	دختر
پسر	پسر

که آنها را به ترتیب با:

{GG, GB, BG, BB}.نشان می‌دهیم

این چهار حالت به دلایل زیر هم‌شانس هستند:

1. تعیین جنسیت هر بچه یک حادثه مستقل است.
2. هر بچه یا پسر یا دختر است.
3. احتمال اینکه بچه پسر باشد یا دختر برابر است.

باید توجه کرد که ما تمام حالاتی که ممکن است در دنیای واقعی رخ دهد را در نظر نگرفتیم.

- احتمال دوجنسی بودن فرزندان در نظر گرفته نشده‌است.
- نسبت نوزادان پسر به دختر دقیقا ۱/۱ نیست. (این نسبت تقریبا برابر با ۱/(۱/۰۵) :boy/girl است.)
- احتمال دوقلوهای همسان بودن فرزندان در نظر گرفته نشده‌است.
- جنسیت فرزندان یک حادثهٔ کاملاً مستقل نیست و به عوامل ارثی و محیطی متعددی، بستگی دارد.

ولی احتمال بروز حوادثی نظیر آنچه در بالا آورده شد به حدی ناچیز است که تأثیر چندانی بر تحلیل ما از مسئله در دنیای واقعی نخواهد داشت.

سؤال اول

- یک خانواده دارای دو فرزند است و فرزند بزرگتر پسر است. احتمال اینکه فرزند کوچکتر دختر باشد چه قدر است؟

فرزند بزرگتر	فرزند کوچکتر
~~دختر~~	~~دختر~~
~~دختر~~	~~پسر~~
پسر	دختر
پسر	پسر

وقتی فرزند بزرگتر پسر باشد دو حالت {GG, GB} حذف می‌شوند و حالت‌های ممکن به صورت زیر در می‌آیند:

که مجموعه آن به صورت {BG, BB} است.

از آنجایی که حالت‌ها هم‌شانس بوده و فقط در یکی از حالت‌ها دختر وجود دارد پس احتمال اینکه فرزند کوچکتر دختر باشد ۱/۲ است.

سوال دوم

- یک خانواده دارای دو فرزند است و حداقل یکی از آنها پسر است. احتمال اینکه این خانواده دارای فرزند دختر باشد چه قدر است؟

شاید بهتر باشد صورت سؤال را به شکل زیر درآوریم:

بدون در نظر گرفتن حالتی که هر دو فرزند دختر باشند احتمال اینکه دو بچه دارای جنسیت مخالف هم باشند چه قدر است؟ جدول حالات در این حالت به شکل زیر در می‌آید:

فرزند بزرگتر	فرزند کوچکتر
~~دختر~~	~~دختر~~
دختر	پسر
پسر	دختر
پسر	پسر

از چهار ترکیب اولیه، سه ترکیب با شرایط مسئله هماهنگی دارند که دو تا از آنها ترکیب مدّ نظر ما هستند. پس احتمال ۲/۳ است.

روش احتمال شرطی

فضای نمونه را خانواده‌های دو فرزندی در نظر بگیرید.

X = حالتی که یکی از فرزندان پسر و دیگری دختر است.

Y = حالتی که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد.

حال:

$$P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

جمع‌بندی

معمولاً افرادی که برای اولین بار با این مسئله رو به رو می‌شوند با جواب سؤال اول موافق هستند ولی بعضا ممکن است در اثر جواب سؤال دوم گیج شوند. دو نکته که باید در این رابطه به آنها توجه کرد:

سؤال دوم هیچ پیش فرضی راجع به سن پسر نکرده. او ممکن است فرزند کوچکتر یا بزرگتر باشد؛ بنابراین این که مسئله را با سه حالت (دو پسر، دو دختر یا ترکیب یک پسر و یک دختر) حل کنیم این موضوع را که احتمال رخ دادن حالت آخر دو برابر بقیه‌است را پوشش نمی‌دهد. احتمال اینکه هر دو فرزند پسر باشند ۱/۴ است.

احتمال مشابهی نیز برای حالتی که هر دو دختر هستند وجود دارد؛ بنابراین احتمال حالت باقی مانده که ترکیبی از پسر و دختر است، ۱/۲ می‌شود.

خطاهای متداول

ممکن است برای سؤال دوم چهار حالت زیر پیشنهاد شود:

پسر دارای یک برادر بزرگتر است.

پسر دارای یک برادر کوچکتر است.

پسر دارای یک خواهر بزرگتر است.

پسر دارای یک خواهر کوچکتر است.

که به نظر می‌رسد فقط دو حالت آخر مورد نظر ماست و بنابراین احتمال برابر با ۱/۲ است. اشکال این حالت‌گیری این است که دو حالت ۱ و ۲ در واقع یک حالت هستند. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که اگر دو برادر داشته باشیم دیگر انتخاب یکی از آنها به صورت مشخص ممکن نیست و در واقع باید بگوییم:

پسری دارای یک برادر بزرگتر است.

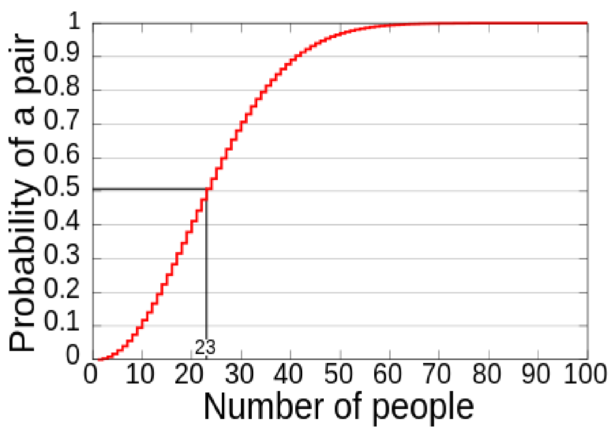
پسری دارای یک برادر کوچکتر است.

از این نوشتار مشخص است که دو گزینه هم‌ارز هستند. بنابراین یکی از آنها باید حذف شود.

مسئله تاریخ تولد

در تئوری احتمالات، مسئله تاریخ تولد یا پارادوکس تاریخ تولد به یافتن احتمال حضور بیش از دو نفر در مجموعه تصادفی n نفره که تاریخ تولد یکسانی داشته باشند، مربوط است. طبق اصل لانه کبوتری این احتمال وقتی که تعداد افراد حاضر برابر با ۳۶۶ (با فرض این که سال ۳۶۵ روز است، بدون در نظر سال کبیسه) شود، مساوی ۱۰۰٪ می‌شود. اگرچه احتمال ۹۹٪ وقتی که تعداد افراد تنها برابر ۵۷ نفر است حاصل می‌شود. همچنین با احتمال ۵۰٪ حداقل دو نفر تولد یکسانی بین ۲۳ نفر دارند. این نتایج با این فرض به دست می‌آید که سال دارای ۳۶۵ روز (یعنی با در نظر نگرفتن ۳۰ اسفند) و احتمال تولد افراد در آن‌ها برابر هم باشد.

محاسبات ریاضی پشت این مسئله باعث ایجاد یک حمله رمزنگاری معروف به اسم حمله روز تولد شده‌است. این حمله بر اساس مدل احتمالی مسئله تاریخ تولد، پیچیدگی توابع درهم‌سازی را کاهش می‌دهد و باعث ساده شدن شکستن آن می‌شود.



نموداری که به‌طور تقریبی احتمال حضور حداقل ۲ نفر را بین مجموعه تصادفی از افراد نشان می‌دهد.

فهم مسئله

مسئله روز تولد این سؤال را مطرح می‌کند که آیا درون یک گروه معین هیچ فردی وجود دارد که با یکی دیگر از افراد گروه تاریخ تولد مشابهی داشته باشد – نه شخص خاصی به‌طور مشخص. (به قسمت «#هم تاریخ تولد با شما» در زیر نگاه کنید برای تحلیل این مسئله جایگزینی که کمتر جالب به نظر می‌رسد) در مثالی که پیش از این مطرح شد، در لیستی شامل ۲۳ نفر، در مقایسه شانس اینکه تاریخ تولد نفر اول لیست با دیگران یکسان باشد ۲۲ است، برای نفر دوم لیست برابر با ۲۱، برای نفر سوم لیست برابر با ۲۰ و همین‌طور تا آخر. از این رو مجموع شانس‌ها برابر است با: ۲۲+۲۱+۲۱+... +۱ = ۲۵۳، بنابراین مقایسه هر فرد با تمام افراد دیگر ۲۵۳ شانس مجزا را به وجود می‌آورد (ترکیب): در یک گروه ۲۳ نفری (۲۳|۲)= ۲/۲۲*۲۳=۲۵۳جفت وجود دارد.

با فرض اینکه احتمال تمام روزهای تولد یکسان باشد، احتمال یک تاریخ تولد داده شده برای فردی که به‌طور تصادفی از بین جمع انتخاب شده ۳۶۵/۱ (با نادیده گرفتن روز کبیسه، ۳۰ اسفند) است. اگرچه زوج‌های یک گروه ۲۳ نفری از لحاظ آماری با ۲۵۳ زوجی که به‌طور مستقل انتخاب شده‌اند هم‌ارز نیستند، اگر یک گروه بر حسب تعداد زوج‌های آن سنجیده شود، پارادوکس تولد نسبت به زمانی که بر حسب افراد سنجیده شود، کم‌تر تعجب‌برانگیز خواهد بود.

محاسبه احتمالات

مسئله مورد نظر، محاسبه احتمال تقریبی حضور حداقل دو نفر در اتاقی با حضور n نفر، با تاریخ تولد یکسان است. برای سادگی، تفاوت‌ها در توزیع، مانند سال کبیسه، دوقلوها، تغییرات روزهای هفته و تغییرات فصلی را نادیده بگیرید و فرض کنید ۳۶۵ تاریخ تولدی که امکان پذیرند، احتمال برابری داشته باشند. توزیع تاریخ تولدها در واقعیت یکنواخت نیست، زیرا تمام تاریخ‌ها احتمال برابری ندارند. اگر P(A) احتمال حضور حداقل ۲ نفر در یک اتاق با تاریخ تولدهای یکسان باشد، محاسبه P(A’)، یعنی احتمال نبود هیچ دو نفری که تولد یکسان داشته باشند می‌تواند آسان تر باشد؛ بنابراین، به این دلیل که P(A) و P(A’) تنها احتمالات ممکن و دو به دو ناسازگار هستند، P(A) = ۱- P(A’). برای احترام به راه حل‌های منتشر شده زیادی که نتیجه گرفته‌اند برای داشتن P(A) بیشتر از ۵۰٪ حضور ۲۳ نفر ضروری است، در زیر، برای محاسبه P(A)، ۲۳ نفر به عنوان مثال در نظر گرفته می‌شود. وقتی رویدادها مستقل از یکدیگر باشند، احتمال کل رویدادهایی که اتفاق می‌افتند برابر است با ضرب احتمالات هر کدام از رویدادها؛ بنابراین اگر P(A’) به عنوان ۲۳ رویداد مستقل تعریف شود، می‌توان به این صورت آن را محاسبه کرد:

P(۱) × P(۲) × P(۳) × ... × P(۲۳)

این ۲۳ رویداد مستقل، متناظر با این ۲۳ نفر هستند و می‌توانند به ترتیب تعریف شوند. هر رویداد می‌تواند با فرد متناظر با آن که با هیچ‌یک از افراد تحلیل شده قبلی، تاریخ تولد یکسانی ندارد مشخص شود. برای رویداد ۱، هیچ فرد تحلیل شده قبلی وجود ندارد؛ بنابراین احتمال P(۱) یعنی اینکه تاریخ تولد فرد شماره ۱ با هیچ‌یک از افراد تحلیل شده قبلی یکسان نباشد، ۱ یا ۱۰۰٪ است. بدون در نظر گرفتن سال‌های کبیسه برای این تحلیل، به دلایلی که در زیر به روشنی خواهد آمد، احتمال برابر با یک می‌توانند به صورت ۳۶۵/۳۶۵ نوشته شود. برای رویداد ۲، تنها فرد تحلیل شده قبلی نفر ۱ است. با فرض اینکه تاریخ تولدها احتمال برابری برای اتفاق افتادن در هریک از ۳۶۵ روز سال را داشته باشند، احتمال P(۲)، اینکه فرد شماره ۲ تاریخ تولد متفاوتی با فرد شماره ۱ داشته باشد، ۳۶۵/۳۶۴ است. این به این دلیل است که اگر فرد شماره ۲ در هر کدام از ۳۶۴ روز دیگر سال متولد شده باشد، فرد شماره ۱ و ۲ تاریخ تولد یکسانی نخواهند داشت. به‌طور مشابه اگر فرد شماره ۳ در هریک از ۳۶۳ روز دیگر سال غیر از تاریخ تولد فرد شماره ۱ و ۲ متولد شده باشد، فرد شماره ۳ تاریخ تولد یکسانی با آن‌ها نخواهد داشت. در نتیجه P(۳)=۳۶۳/۳۶۵. این تحلیل تا رسیدن به فرد شماره ۲۳ ادامه پیدا می‌کند، فردی که احتمال آنکه تاریخ تولد یکسانی با افراد تحلیل شده قبلی نداشته باشد، یعنی P(۲۳)، ۳۴۳/۳۵۶ است.(P‘ (A برابر با ضرب این احتمالات مجزاست:

(۱) P(A‘) = ۳۶۵/۳۶۵ × ۳۶۵/۳۶۴ × ۳۶۵/۳۶۳ × ۳۶۵/۳۶۲ × ... × ۳۶۵/۳۴۳

می‌توان عبارات معادله ۱ را این‌گونه جمع‌بندی کرد:

(۲) P(A‘) = (۳۶۵/۱)^{23} × (۳۶۵ × ۳۶۴ × ۳۶۳ × ... × ۳۴۳)

با محاسبه معادله ۲ مقدار P(A’) =۰/۴۹۲۷۰۳ بدست می‌آید؛ بنابراین

P(A) =(۱-۰/۴۹۲۷۰۳ =۰/۵۰۷۲۹۷) (۵۰/۷۲۹۷٪) این روند می‌تواند برای یک گروه n نفره تعمیم داده شود، به‌طوری‌که P(n) احتمال وجود حداقل دو نفر از این n نفر است که تاریخ تولد یکسانی دارند. ساده‌تر این است که ابتدا احتمال p¯(n) ، یعنی اینکه تمام n تاریخ تولدها متفاوت باشند محاسبه شود. با توجه به اصل لانه کبوتری اگر n>۳۶۵ باشد، p¯(n) صفر است.

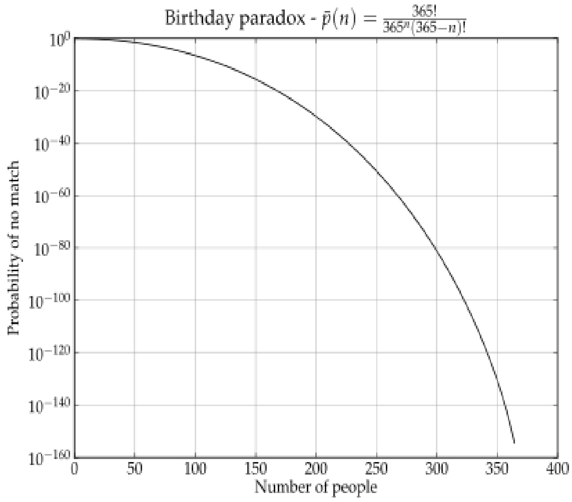
اگر n≤۳۶۵ باشد آنگاه:

$$\bar{p}(n) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$
$$= \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$
$$= \frac{365!}{365^n (365-n)!} = \frac{n! \cdot \binom{365}{n}}{365^n}$$

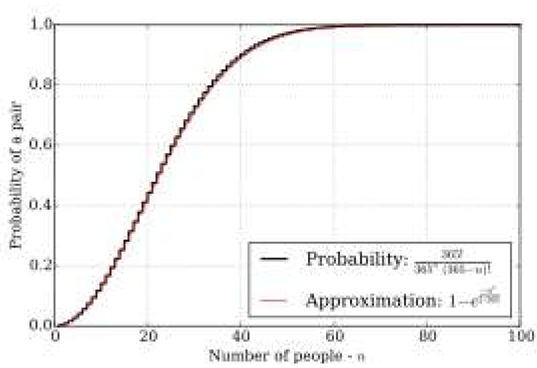
که در اینجا '!' عمل فاکتوریل و $\binom{365}{n}$ ضریب دو جمله‌ای را نشان می‌دهد. این معادله این حقیقت را تشریح می‌کند که در نبود افرادی که تاریخ تولد یکسان داشته باشند، یک نفر دوم نمی‌تواند تاریخ تولد مشابهی با نفر اول داشته باشد (۳۶۴/۳۶۵)، سومی نمی‌تواند تاریخ تولد یکسانی با دو تای اول داشته باشد (۳۶۳/۳۶۵) و در کل nامین تاریخ تولد نمی‌تواند با n-۱ تاریخ تولد قبلی یکسان باشد. این رویداد که حداقل دو نفر از n نفر تاریخ تولد یکسان داشته باشند، متمم این است که کل n تاریخ تولدها متفاوت باشند؛ بنابراین احتمال آن، یعنی p(n) برابر است با: $p(n) = 1 - \bar{p}(n).$

این احتمال برای n=۲۳ از ½ بیشتر است (با مقداری در حدود ۵۰/۷٪). جدول زیر این احتمال را برای برخی مقادیر دیگر n نشان می‌دهد (این جدول همان‌طور که در بالا شرح داده شد، از وجود سالهای کبیسه چشم پوشی می‌کند):

n	p(n)
۱۰	٪۱۱,۷
۲۰	٪۴۱،۱
۲۳	٪۵۰،۷
۳۰	٪۷۰،۶
۵۰	٪۹۷،۰
۵۷	٪۹۹،۰
۱۰۰	٪۹۹،۹۹۹۹۷
۲۰۰	۹۹،۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹ ٪۹۹۹۹۹۹۸
۳۰۰	(100– (۱۰$^{-۸۰}$×۶))%
۳۵۰	(100 − (3 × ۱۰$^{-۱۲۹}$))%
۳٦٥	(100 − (۱۰$^{-۱۵۵}$× ۱,۴۵))%
۳٦٦	٪۱۰۰



احتمال تقریبی این که هیچ دو نفری در یک گروه n نفری تاریخ تولد یکسان نداشته باشند. توجه کنید که مقیاس عمودی لگاریتمی است (به ازای هر واحد کم شونده ۱۰۲۰ مرتبه احتمال، کم ترمی شود).



نمودار نمایش صحت تقریب $1 - e^{-n^2/(2\times365)}$

تقریب‌ها

بسط سری تیلور برای تابع نمایی به صورت زیر است(ثابت e تقریباً برابر است: با ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

که تقریب مرتبه اول برای ex در $|x| \ll 1$ را به دست می‌دهد:

$$e^x \approx 1 + x.$$

برای به کار بردن این تقریب در اولین عبارت به دست آمده برای p(n)، $x = -i/365$ قرار دهید. آنگاه $e^{-i/365} \approx 1 - i/365$ سپس برای هر عبارت در فرمول p(n) $1 - i/365 \approx e^{-i/365}$

برای i=۱، $1 - 1/365 \approx e^{-1/365}$

اولین عبارتی که برای p(n) بدست آمد، می‌تواند به صورت زیر تخمین زده شود:

$$\bar{p}(n) \approx 1 \times e^{-1/365} \times e^{-2/365} \cdots e^{-(n-1)/365}$$
$$= 1 \times e^{-(1+2+\cdots+(n-1))/365}$$
$$= e^{-(n(n-1)/2)/365}.$$

در نتیجه:

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n) \approx 1 - e^{-n(n-1)/(2\times365)}.$$

یک تقریب غیر دقیق تر که معادل این عبارت است به صورت زیر است:

$$p(n) \approx 1 - e^{-n^2/(2\times365)},$$

که همانگونه که نمودار نشان می‌دهد، تقریباً صحیح است. درک این مطلب ساده است که یک روش مشابه برای هر تعداد از «نفرات» و «روزها» می‌توانند به کار رود. اگر به جای ۳۶۵ روز، n روز را در نظر بگیریم و m نفر وجود داشته باشند و n ≤ m باشد، آنگاه با استفاده از روش بالا به این نتیجه می‌رسیم که اگر Pr[(n, m)] احتمال حضور حداقل دو نفر خارج از m نفر که از میان یک مجموعه n روزه تاریخ تولد یکسان دارند باشد، آنگاه:

$$Pr[(n,m)] \approx 1 - e^{-m^2/2n}.$$

یک توان ساده

احتمال حضور هر دو نفری که تاریخ تولد یکسان نداشته باشند ۳۶۵/۳۶۴ است. در یک اتاق شامل n نفر،C(n, ۲) =n(n−۱)/۲ تعداد زوج از نفرات حضور دارند، یعنی C(n, ۲)رویداد. احتمال عدم حضور دو نفر که تاریخ تولد یکسانی داشته باشند، می‌تواند با این فرض که این رویدادها مستقل اند و بنابراین با ضرب احتمالات آن‌ها در یکدیگر تخمین زده شود. مختصراً ۳۶۴/۳۶۵ می‌تواندC(n, ۲) بار در خودش ضرب شود که در این صورت خواهیم داشت:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{C(n,2)}.$$

و اگر این، احتمال عدم حضور فردی با تولد یکسان باشد، آنگاه احتمال اینکه برخی نفرات تاریخ تولد یکسان داشته باشند به صورت زیر است:

$$p(n) \approx 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{C(n,2)}.$$

تقریب پوواسون

با استفاده از تقریب پوواسون برای این دوجمله‌ای داریم:

$$\mathrm{Poi}\left(\frac{C(23,2)}{365}\right) = \mathrm{Poi}\left(\frac{253}{365}\right) \approx \mathrm{Poi}(0.6932)$$

$$\Pr(X>0) = 1-\Pr(X=0) = 1-e^{-0.6932} = 1-0.499998 = 0.500002.$$

که باز هم این بالای ٪۵۰ است.

تقریب تعداد افراد

این مسئله نیز می‌تواند به وسیله فرمول زیر برای تعداد نفراتی که حضورشان برای داشتن حداقل ٪۵۰ شانس برای تطبیق ضروری است تخمین زده شود:

$$n \approx \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 2 \times 365 \times \ln(0.5)} = 22.999943.$$

این، نتیجه‌ای برای این تخمین مناسب است که اگر یک رویداد با احتمال ۱ در k ،k ln ۲ مرتبه تکرار شود، برای حداقل یک بار اتفاق افتادن ٪۵۰ شانس دارد.

جدول احتمال(جدول را جدا میفرستم)

مربع‌های سفید در این جدول تعداد هش‌های مورد نیاز برای رسیدن به احتمال رخداد تصادم (ستون) در یک فضای هش داده شده از یک اندازه معین به بیت (ردیف) را نشان می‌دهد.

(با استفاده از مقایسه تولدها: «اندازه فضای هش» (ردیف‌ها) «۳۶۵ روز» خواهند بود. «احتمال تصادم» (ستون‌ها) ٪۵۰ خواهند بود و «تعداد نفرات مورد نیاز» ۲۶ نفر خواهد بود (تقاطع ستون‌ها و ردیف‌ها). همچنین از این جدول می‌توان برای تعیین کوچک‌ترین hash size مورد نیاز استفاده کرد (کران‌های بالای معین روی hashها و احتمال خطا)، یا احتمال تصادم (برای تعداد ثابت hashها و احتمال خطا).

برای مقایسه،

۱۰−۱۵

تا

۱۰−۱۸

سرعت خطای بیت اصلاح نشدنی برای یک دیسک سختِ نوعی است. در تئوری، MD۵، ۱۲۸ بیت، باید تا تقریباً ۸۲۰ میلیارد سند در آن محدوده باقی بماند، حتی اگر این احتمال وجود داشته باشد که تعداد خروجی‌ها بسیار بیشتر باشد.

مسئله‌های تاریخ تولد دیگر

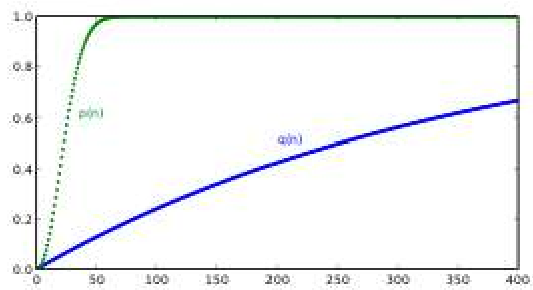
هم تاریخ تولد با شما

در مسئلهٔ اصلی هیچ‌کدام از دو نفر از قبل تعیین شده نبودند ولی در حالتی که هم تاریخ تولد بودن با شخصی که از پیش مشخص شده مثلا خود شما (در اتاقی که در آن n نفر دیگرِ حضورِ دارند) مد منظر مسئله باشد احتمال به وسیلهٔ رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$q(n) = 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right)^n$$

و برای حالت عمومی :

$$q(n;d) = 1 - \left(\frac{d-1}{d}\right)^n.$$



مقایسهٔ $p(n)$ = احتمال هم تاریخ تولد بودن؛ $q(n)$ = احتمال هم تاریخ تولد بودن با شما

حل یکی از پیچیده‌ترین مسائل ریاضی توسط یک آمارشناس بازنشسته آلمانی

یکی از مشکلات مهم در دنیای ریاضی، حل نشدن مسائل ریاضی است. یکی از مسائلی که حتی با تجربه‌ترین ریاضی‌دانان نیز برای حل آن دهه‌ها تلاش کرده‌اند، نابرابری همبستگی گاوسی یا همان **GCI** است. اما خوشبختانه این روزها این مسئله توسط یک آمار شناس بازنشسته آلمانی حل شده است.

یک آمار شناس بازنشسته آلمانی در حال مسواک زدن دندان‌هایش مسئله نابرابری همبستگی گاوسی را حل کرد. اما این موضوع بیشتر از این که مورد توجه جامعه گسترده ریاضیات قرار گیرد، به دلیل اینکه فردی عادی توانسته آن را حل کند کمی با شک و تردید مواجه شده است.

دونالد ریچارد یکی از ریاضی‌دانان دانشگاه پنسیلوانیا در توضیحات خود در خصوص اثبات نامعادله همبستگی گاوسی توسط یک آمار شناس بازنشسته آلمانی به نام روین اظهار داشته است که بیشتر ریاضی‌دانان در حدود ۴۰ سال است که بر روی این مسئله پیچیده ریاضی فکر می‌کنند و خود وی نیز از ۳۰ سال پیش درگیر حل این مسئله است.

قانون نامعادله همبستگی گاوسی ابتدا در سال ۱۹۵۰ میلادی مطرح شد و در سال ۱۹۷۲ میلادی به صورت فرمول درآمد. این قانون ساده این گونه بیان می‌کند که: اگر دو شکل مانند چهارگوش و یا دایره بر روی یکدیگر قرار گیرند، احتمال نشانه رفتن روی یکی از شکل روی همه قرار گرفته توسط دارت باعث افزایش شانس نشانه رفتن دیگری خواهد شد.

برای ساده‌تر شدن مطلب ابتدا فرض کنید که یک مستطیل آبی و یک دایره زرد داریم. یکی از این دو شکل بر روی یکدیگر به گونه‌ای بر روی یک دارت قرار گرفته‌اند که شکل بالای مرکز دارت را می‌پوشاند. در صورتی که فردی تیری را به دارت پرتاب نماید متوجه خواهد شد که توزیع قوسی در مرکز دارت تشکیل شده است با احتمال بسیار بالای اینکه تیر دارت بر روی بخش‌هایی که دو شکل یکدیگر را پوشانده‌اند به هدف خورده است.

اما فرضیه دیگری نیز وجود دارد که می‌گوید، که تعداد تیرهای دارتی که بر روی بخش هم پوشانی شده قرار گرفته است متناسب با تعداد تیرهایی است که خارج از این بخش هم پوشانی قرار گرفته‌اند.

در واقع مسئله نامعادله همبستگی گاوسی بر این اصل تاکید دارد که احتمال اینکه تیرهای دارت بخش هم پوشانی شده دایره و مستطیل را هدف بگیرد برابر و یا بیشتر از حاصل ضرب احتمال این که تیرها در داخل مستطیل خارج از ناحیه هم پوشانی قرار گیرند در احتمال اینکه تیرها در داخل دایره خارج از ناحیه هم پوشانی قرار گیرند است.

شاید در نگاه اول این مسئله ساده به نظر برسد اما اثبات آن با قوانین و فرمول‌های ریاضی کمی دشوار است.

یکی از ریاضی‌دانان جوان به نام لورن پیت از دانشگاه ویرجینیا در خصوص اثبات این نظریه توسط یک آمار شناس بازنشسته بیان کرده است که اولین بار که این خبر را شنیده است واقعاً تعجب کرده است که چطور یک فرد میان سال که تقریباً فردی عادی محسوب می‌شود و جزو نابغه‌های ریاضی نیست اولاً ذهن خود را درگیر حل این مسئله کرده است و در ثانی توانسته این مسئله را که سال‌های سال است به عنوان یکی از بچیده‌ترین مسائل ریاضی شناخته شده است حل نماید. او می‌گوید حتی اگر ۵ سال دیگر نیز می‌گذشت وی به شخصه قادر به ارائه راه حل مناسب برای این مسئله پیچیده نبوده است.

از طرفی بسیاری از ریاضی‌دانان این موضوع را که آمار شناس آلمانی در حالی که دندان‌های خود را مسواک می‌زده است به راه حل مناسب رسیده است بسیار قابل توجه دانسته‌اند.

نکته جالب دیگر این بوده است که این آمار شناس بازنشسته نمی‌دانسته است که چگونه از نرم‌افزار لاتک که در واقع یک نرم‌افزار پردازش متن است برای تایپ فرمول‌های ریاضی استفاده نماید و بنابراین همه قوانین و اثبات آن را با استفاده از نرم‌افزار ورد نوشته و آن‌ها در یکی از سایت‌های معتبر قرار داده است.

اما هنگامی که راه حل و اثبات خود را برای موسسه ریچاردز اتٍ پن می‌فرستد به وی گفته می‌شود که این مسئله قبلاً حل شده است. از طرفی بقیه اعضای جامعه ریاضیات نیز به دلیل این‌که تا قبل از این راه حل‌ها و فرضیه‌های غلط زیادی را در خصوص این مسئله دریافت کرده بودند نسبت به دریافت راه حل این آمار شناس آلمانی واکنش خاصی نشان نداده و بنا را بر این گذاشته بودند که راه حل پیشنهادی وی نیز غلط خواهد بود.

در سال ۲۰۱۵ روین یعنی همان آمار شناس بازنشسته آلمانی فرضیه‌های خود را در خصوص این نامعادله پیچیده به بوآز کلارتاگ از موسسه ویزمن وابسته به دانشگاه تلاویو به همراه دو فرضیه دیگر ارسال کرده است. کلارتاگ با خواند اولین فرضیه و برخوردن به یک ایراد تمام فرضیه‌ها را کنار گذاشت و توجه دیگری به آن‌ها نداشت.

اما روین سعی کرد فرضیه و راه حل‌های اثباتی خود را در مجله فار ایست که در واقع خود برای مدت ۱۲ ماه سردبیر آن بوده است چاپ کند. با وجود این‌که روین راه حل و فرضیه‌های غلطی را در مجله خود به صورت عمومی چاپ کرده بود اما جامعه ریاضی مشکل خاصی برای او ایجاد نکرد. البته بعد از چاپ به گفته خود روین بسیاری از ریاضی‌دانان به خصوص ریاضی‌دانان دانشگاه‌های آلمان در خصوص راه حل‌های ارائه شده وی ایراداتی بیان کرده و برای وی ارسال می‌کرده‌اند.

بعد از آن در همان سال دو فرد دیگر به نام‌های رافائل لاتالا و دانشجوی وی به نام داریوش ماتلاک دیدگاه‌های خود را در خصوص راه حل‌ها و اثبات ارائه شده توسط روین ارائه کردند.

آن‌ها در یادداشت خود این گونه نوشته‌اند:

"هدف این یادداشت ارائه یک راه حل برای فرضیه‌هایی است که توماس روین در خصوص نامعادله همبستگی گاوسی ارائه کرده است. هر چند این روش ساده و پیش‌پا افتاده است اما با کمی بررسی به این نتیجه رسیده‌ایم که درک و ارائه این راه حل چندان کار ساده و آسانی نبوده است. به همین دلیل تصمیم گرفتیم تا راه حل‌های ارائه شده تا دوباره سازمان دهی کرده و آن‌ها را تنها محدود به مسئله گاوسی کنیم. ما امیدواریم که با این کار کمکی به حل این مسئله کرده باشیم.

بعد از این یادداشت ریاضی‌دانان و افراد مختلف نسبت به راه حل ارائه شده توسط روین توجه نشان دادند و بعد از گذشت ۱۲ ماه جامعه ریاضی بالاخره تائید کرد که راه حل ارائه شده توسط روین راه حل معقول و منطقی برای نامعادله همبستگی گاوسی است.

هر چند هنوز سوالاتی در خصوص راه حل و فرضیه‌های ارائه شده توسط روین وجود دارد که باید به آن‌ها پاسخ داده شود اما به هر حال راه حل ارائه شده مورد تائید جامعه ریاضی و سایر ریاضی‌دانان قرار گرفته است.

معرفی ادوین توماس جینز

ادوین توماس جینز (Edwin Thompson Jaynes) متولد پنجم ژولیه ۱۹۲۲)۳۰ آوریل ۱۹۹۸) استاد برجسته دانشگاه واشینگتن در رشته فیزیک بود. وی به‌طور گسترده‌ای در زمینه فیزیک آماری و مهمتر از آن نظریه احتمال و استنتاج آماری کار کرده‌است که از جمله می‌توان به آثاری از وی که در سال ۱۹۵۷ به چاپ رسید و حاوی تفسیر منطقی چگونگی کارکرد اصل بیشینه آنتروپی از منظر کاربرد نظریه بیز است نام برد (گرچه اصل بیشینه آنتروپی برای اولین بار توسط گیبس به کار گرفته شد اما تا قبل از جینز فیزیکدانان نتوانسته بودند توجیه منطقی‌ای برای اثبات درستی این روش ارائه کنند.)

تا قبل از مقاله‌های جینز درستی این روش مانند یک معجزه قلمداد می‌شد و باعث بروز گرایش‌های انحرافی جدیدی در فیزیک آماری و ترمودینامیک شده بود) جینز در طول حیات علمی خود با جدیت از مکتب فکری‌ای که نظریه احتمال را به عنوان بسط منطق ارسطویی می‌داند (امروزی این مکتب فکری به نام آماری بیز شناخته می‌شود. هرچند ذکر این نکته ضروری است که اساس این طرز تفکر توسط ریاضی‌دان معروف فرانسوی لاپلاس بنا شده است.) دفاع کرد و مقاله‌های زیادی برای دفاع از این دیدگاه به چاپ رسانید. براین اساس هر زمان بتوانیم درستی فرضیات یا عبارات منطقی را با قطعیت بیان کنیم آنگاه نظریه احتمال به منطق سنتی کاهش خواهد یافت. آخرین اثر این دانشمند برجسته کتابی تحت عنوان نظریه احتمال: منطقی برای علم می‌باشد. هرچند این کتاب قرار بود در دو جلد به چاپ برسد اما با مرگ نویسنده این کتاب نیمه تمام ماند و در یک جلد امروزه به چاپ می‌رسد. علی رقم آنکه این کتاب از نظر نویسنده کامل نیست اما حاوی مطالب بسیار ارزشمندی درباره‌ی نظریه احتمال است. درک صحیح این کتاب باعث برطرف شدن بسیاری از اشتباهات رایج در زمینه نظریه احتمال می‌شود.

جینز نشان داد که بسیاری از خطاهای به وجود آمده در مکانیک کوانتم و فیزیک آماری بر اثر عدم شناخت صحیح از نظریه احتمال حاصل شده. به این دلیل که بسیاری به اشتباه بر این باورند که احتمال وقوع یک پدیده توجیه فیزیکی دارد در حالی جینز از این نظریه دفاع می‌کرد که احتمال تنها نمایشی از وجود اطلاعات ناقص (یا عدم برخورداری از اطلاعات کامل از منظر ناظر) نسبت به یک پدیده است. در حقیقت جینز توانست مبانی‌ای را که توسط لاپلاس، شانن، جفری و بیز تدوین شده بود را تحت یک قالب یکپارچه جمع‌آوری کند.

Edwin Thompson Jaynes (۱۹۲۲–۱۹۹۸), photo taken circa ۱۹۶۰.	
زادهٔ	۵ ژوئیهٔ ۱۹۲۲ واترلو آیوو
درگذشت	۳۰ آوریل ۱۹۹۸ (۷۵ سال) سنت لوییس میزوری
محل تحصیل	دانشگاه پرینستون
شناخته‌شده برای	حداکثر آنتروپی ترمودینامیک احتمالات بیزی Jaynes–Cummingsmodel
پیشینه علمی	
شاخه(ها)	فیزیک دان پایان نامه
محل کار	دانشگاه واشنگتن در سن لوئیس
پایان نامه	*An electronic theory of ferro-electricity* (۱۹۴۸)
استاد راهنما	یوجین ویگنر

آنالیز ریاضی نام عمومی آن بخش‌هایی از ریاضیات است که با مفاهیم حد و همگرایی مربوطاند؛ و در آن‌ها موضوعاتی مثل پیوستگی و انتگرال‌گیری و مشتق‌پذیری و توابع غیرجبری بررسی می‌شود. این موضوعات را معمولاً در عرصه اعداد حقیقی یا اعداد مختلط و توابع مربوط به آن‌ها بحث می‌کنند ولی می‌توان آن‌ها را در هر فضایی از موجودات ریاضی که در آن مفهوم "نزدیکی" (فضای توپولوژیک) یا "فاصله" (فضای متریک) وجود دارد به‌کار برد. آنالیز ریاضی از کوشش‌های مربوط به دقیق‌کردن مبانی و تعریف‌های حسابان سر برآورده است. آنالیز ریاضی در واقع به نقاط استثنایی ریاضیات می‌پردازد . کلمه آنالیز به همین معنی (نقاط استثنایی) است . در واقع آنالیز ریاضی پلی است که توپولوژی را به جبر مرتبط می‌کند.

در این قسمت مطالب و قضایای مختصری درباره فضای متری آورده شده .

علاقه‌مندان برای مطالعه وسیع‌تر و کامل‌تر می‌توانند به کتاب اصول آنالیز ریاضی نوشته والتر رودین مراجعه کنند .

تعریف: فرض کنید $X \neq \phi$ یک مجموعه $d{:}X.X\to R$ در خواص زیر صدق کند .

① برای هر p و q متعلق به X, $d(p,q)\geqslant 0$ $d(p,q)=0$ اگر وفقط اگر $p=q$.

② برای هر p,q متعلق به X ، $d(p,q) = d(q,p)$.

③ برای هر p,q و l متعلق به X ، $d(p,q) \le d(p,l) + d(l,q)$

در این صورت تابع d را تابع فاصله یا متر روی X می‌نامیم و X را فضای متری می‌گوییم .

یک فضای متری را با زوج (X,d) نمایش می‌دهیم .

قرارداد: در تمام تعاریف زیر در نظر داشته باشید (X,d) یک فضای متری باشد و $E \subseteq X$ باشد .

تعریف: آ)یک همسایگی نقطه p مجموعه‌ای است مثل (p) مرکب از تمام نقاطی چون q که $d(p,q)\le r$، عدد r شعاع $N_r(p)$ نامیده می‌شود .

ب) نقطه $p\in E$ یک نقطه حدی یا انباشتگی مجموعه E است هر گاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای چون $q\in E$ غیر از p باشد .

$$(N_r(p) - \{p\}) \cap E \neq \varnothing$$

پ) هرگاه $p\in E$ نقطه حدی نباشد آنگاه p یک نقطه‌ی تنها یا ایزوله E نام دارد.

$$N_r(p) \cap E = \{p\}$$

ت) نقطه $P\in E$ یک نقطه درونی یا داخلی می‌نامند اگر r–همسایگی p موجود باشد به‌طوری $N_r(p)\subseteq E$ مجموعه نقاط درونی را با $\dot{E}$ یا $int(E)$ نشان می‌دهند .

با توضیحات بالا بدیهی است $E\supseteq E^0$.

ث) E را یک مجموعه بسته گوییم اگر شامل کلیه نقاط حدی خود باشد. به عبارت دیگر $E \supseteq E'$.

ج) E یک مجموعه باز است هرگاه هر نقطه E یک نقطه درونی‌اش باشد به عبارت دیگر $E = E^0$.

چ) E کراندار است هرگاه عددی حقیقی چون M و نقطه‌ای مثل $q \in X$ باشند به‌طوری که به ازای هر $p\in E$، $d(p,q)<M$.

ح) E کامل است هرگاه E بسته و هر نقطه ی E یک نقطه حدی آن باشد.

خ) تعریف: فرض کنید (x,d) فضای متری و $E \subseteq X$ باشد مجموعه $E' \cup E$ را بستار E می‌نامیم و با $\bar{E}$ نمایش می‌دهیم .

د) E در X چگال است هرگاه هر نقطه X یک نقطه حدی E باشد یا یک نقطه E باشد. $E' \cup E = \bar{E} = X$

مثال: R با متر قدر مطلق را در نظر بگیرید.

مجموعه	نقاط حدی	نقاط ایزوله	نقاط درونی	مجموعه بسته	مجموعه باز	مجموعه تام	مجموعه کراندار
$E=[0,1]$	$E'=[0,1]$	$\varnothing = I$	$E^0=[0,1]$	بله	–	بله	بله
$E=[0,1]$	$E'=[0,1]$	$\varnothing = I$	$E^0=[0,1]$	–	بله	–	بله
$E = \{ 1/n : n >= 1 \}$	$E'=\{0\}$	$I=E$	$E^0 = \varnothing$	–	–	–	بله
$E=Q$	$R=E'$	$\varnothing = I$	$E^0 = \varnothing$	–	–	–	–

قضیه ۱: هر همسایگی , یک مجوعه باز است

قضیه ۲: هر گاه p یک نقطه حدی مجموعه E باشد هر همسایگی p بی‌نهایت نقطه از E دارد .

نتیجه: هر مجموعه متناهی از نقاط نقطه حدی ندارد .

قضیه ۳: فرض کنیم $\{E_a\}$ گردایه ای (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه های E_a باشد در این صورت :

$$(\cup_a E_a)^c = \cap_a (E_a^c)$$

قضیه۴: E باز است اگر و فقط متمم آن بسته باشد.

برهان:

ابتدا فرض می‌کنیم E^c بسته باشد.x ای در E اختیار می نماییم . پس$x \in E^c$, x نقطه حدی آن E^c نیست. لذا یک همسایگی از x مانند N هست به‌طوری که $E^c \cap N$ تهی می‌باشد، یعنی $E \subseteq N$ بنابراین x یک نقطه درونی E است، و E باز می‌باشد.

حال فرض کنید E باز باشد. x را یک نقطه حدی E^c در نظر می‌گیریم. در این صورت هر همسایگی x نقطه‌ای از E^c را دارد در نتیجه x یک نقطه‌ی درونی E نیست. چون E باز است این یعنی

$x \in E^c$ در نتیجه E^c بسته می‌باشد.

قضیه ۵:

آ) به ازای هرگردایه $\{G_a\}$ از مجموعه های باز $\cup_a G_a$ باز است.

ب) به ازای هرگردایه $\{F_a\}$ از مجموعه های بسته $\cap_a F_a$, بسته است.

پ) به ازای هر گردایه متناهی $G_1, \dots, G_n$ از مجموعه‌های باز، $\cap^n_{i=1} G_i$ باز است.

ت) به ازای هر گردایه متناهی $F_1, \dots, F_n$ از مجموعه‌های بسته، $\cup^n_{i=1} F_i$ بسته خواهد بود.

قضیه ۶: فرض کنید (x,d) فضای متری و $E \subseteq X$ باشد در این صورت:

الف) $\bar{E}$ یک مجموعه بسته است.

ب) E یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر $\bar{E} = E$.

ج) اگر F یک مجموعه بسته باشد و شامل E باشد($E \subseteq F$) در این صورت $\bar{E} \subseteq F$.

نتیجه: $\bar{E}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل E است.

قضیه ۷: فرض کنیم E مجموعه‌ای باشد ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار است. قرار می‌دهیم $y=\sup E$ در این صورت $y \in \bar{E}$. لذا اگر E بسته باشد $y \in E$.

برهان: هرگاه $y \in E$ آنگاه $y \in \bar{E}$ فرض کنیم $y \notin E$ دراین صورت به ازای هر $h>0$ نقطه‌ای مانند $x \in E$ هست که

$y-h<x<y$ - زیرا در غیر این صورت $y-h$ یک کران بالایی برای E خواهد بود. لذا y یک نقطه حدی E می‌باشد. بنابر این $y \in \bar{E}$

.

مجموعه‌های فشرده:

تعریف: منظور از یک پوشش باز فضای E در فضای متری یعنی گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های باز X مانند $\{G_a\}$ که

$E \subseteq G_{a_1} \cup \dots \cup G_{a_n}$.

تعریف: زیرمجموعه K از فضای متری X را فشرده نامند هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوششی متناهی باشد.

به طور صریح تر اینکه بتوان آن را به صورت زیر نوشت . $K \subseteq G_{a_1} \cup \dots \cup G_{a_n}$

واضح است که هر مجموعه متناهی فشرده است.

قضیه ۸: زیرمجموعه‌های فشرده فضای متری بسته‌اند.

برهان:فرض کنید K یک زیرمجموعه فشرده فضای متری C باشد. ثابت می‌کنیم متمم K یک مجموعه زیرمجموعه بازی از X می باشد.

فرض کنید $p \in X$ و $p \notin K$ اگر $q \in K$, V_q, W_q را به ترتیب همسایگی‌هایی از p, q باشند که شعاعشان $d(p,q)$ ۰.۵ کمتر است. چون K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه در آن مانند $q_1, \dots, q_n$ وجود دارند به‌طوری که

$$K \subseteq W_{q_1} \cup \dots \cup W_{q_n}$$

هرگاه $V = V_{q_1} \cap \dots \cap V_{q_n}$ آنگاه V یک همسایگی p است که W را قطع نمی کند بنابراین $V \subseteq K^c$ در نتیجه، p یک نقطه درونی متمم K می باشد لذا بنابر تعریف مجموعه بسته و قضیه چهار K بسته است.

قضیه: زیرمجموعه‌های بسته‌ی مجموعه‌های فشرده فشرده اند.

قضیه ۹: فرض کنید $(E \subseteq X)$. سه گزاره زیر معادل‌اند:

الف)E بسته و کراندار است.

ب) E فشرده است.

پ) هر زیر مجموعه نامتناهی یک نقطه حدی دارد.

(معادل بودن الف و ب در قضیه بالا به قضیه هاینه – برل معروف شده است.)

پیدایـــش مجموعـــه هـــای بـــاز، مجموعـــه هـــای بســته و نقــاط حــدی در آنالیــز ریاضــی و توپولوژی

نوع مقاله : ترجمه

توپولـوژی عمومـی ریشـه در آنالیـز حقیقـی و مختلـط دارد، یعنـی جایـی کـه در آن از مفاهیـم درهـم تنیدۀ مجموعـۀ بـاز، مجموعـۀ بسـته و نقطـۀ حـدی اسـتفاده‌هایی مهـم شـده اسـت. توپولـوژی عمومـی ریشـه در آنالیـز حقیقـی و مختلـط دارد، در ایـن مقالـه، بـه بررسـی چگونگـی پیدایـش و تکامـل ایـن سـه مفهـوم در اواخـر قـرن نوزدهـم و اوایـل قـرن بیسـتم می‌پردازیـم کـه بـه ویـژه بـه یمـن پژوهش‌هـای وایرشـتراس، کانتـور و لبـگ صـورت گرفتـه اسـت. بـه شـکل‌های گوناگـونِ قضیـۀ بولتسانو-وایرشـتراس کـه در درس گفتارهـای منتشرنشـدۀ وایرشـتراس موجـود اسـت، توجهـی ویـژه خواهیـم کـرد. نخسـتین تـلاش ناکامـی را کـه در نوشـته‌ای منتشـر نشـده از دِدِکینـد بـرای تعریـف مجموعه‌هـای بـاز صـورت گرفتـه اسـت و همچنیـن نزدیـک شـدنِ پئانـو و ژُردان را بـه تعریـف ایـن مجموعه‌هـا مـورد بحـث قـرار می‌دهیـم. در عیـن حـال، بـا بررسـی تأثیـر متقابل آن سـه مفهـوم (در کنـار مفاهیـم بسـتار و مجموعـۀ مشـتق) می‌کوشـیم تـا شـالوده‌های اصلـی توپولـوژی عمومـی در نیمـۀ نخسـت قـرن بیسـتم را آشـکار سـازیم.

دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی

۲ دانشگاه زنجان، دانشکده علوم، گروه ریاضی

sisylana lacitamehtam laeR

hguP CC ,hguP nampahC selrahC

هندسـه هواپیمـا درس ریاضـی مورد علاقه شـما در دبیرسـتان؟ آیـا دوسـت داشـتید قضیه‌هـا را اثبـات کنیـد؟ آیـا از بـه خاطـر سـپردن انتگـرال خسـته شـده‌اید؟ اگـر چنیـن اسـت، تجزیـه و تحلیـل واقعـی می‌توانـد فنجـان چـای شـما باشـد. برخـلاف حسـاب و جبـر ابتدایـی، نـه شـامل دسـت‌کاری فرمـول اسـت و نـه کاربـردی در سـایر زمینه‌هـای علـم. هیـچ یـک. ایـن ریاضیـات محـض اسـت و امیـدوارم بـرای شـما ریاضیـدان تـازه کار جـذاب باشـد.

ایـن کتـاب بـرای خردسـالان و سـالمندان کالـج کـه عاشـق ریاضـی هسـتند و از تصاویـری کـه ریاضـی را نشـان می‌دهنـد سـود می‌برنـد، تنظیـم شـده اسـت. بـه نـدرت یـک عکـس اثبـات می‌شـود، امـا امیـدوارم یـک تصویـر خـوب درک شـما را از دلیـل درسـت بـودن چیـزی تقویـت کنـد. دیـدن بـاور کـردن اسـت.

کوشی پایه گذارانالیز ریاضی را بیشتر بشناسید

آگوستین لویی کوشی، از ریاضیدانان مطرح، در ۲۱ آگوست سال ۱۷۸۹ در پاریس و در خانواده‌ای مذهبی و مشهور به دنیا آمد. پدرش مردی مقدس و مادرش زنی باتقوا بود. کوشی، نزد پدر تعلیم دید. پدری که مقام‌های اداری بالایی را برعهده داشت، پدر کوشی، نخستین منشی جلسه سنا بود.

گفته‌ای که به حقیقت پیوست

شاید نخستین کسی که استعداد آگوستین کوچک را شناخت، «لاگرانژ» از ریاضیدانان مطرح دوره کودکی کوشی بود. وی بعد از رفت‌وآمد پدر کوشی به منزلش که اغلب آگوستین کوچک را نیز همراه خود داشت، درباره آگوستین به دوستش «لاپلاس» گفته‌بود: «او روزی ریاضیدان بزرگی خواهد شد و همگی ما را خواهد گرفت». برای تحقق پیش‌بینی لاگرانژ زمان زیادی طول نکشید.

کوشی که کاتولیک مومنی بود، نقش عمده‌ای در موسسات خیریه کلیسایی به عهده گرفت. شهرت او شهرت فردی متعصب، خودخواه و تنگ‌نظر بود. آبل از مشاهیر زمان کوشی وی را فردی دیوانه، بی‌نهایت کاتولیک و متعصب توصیف کرده بود. در سن ۲۸ سالگی با «آلوئیز دوبور» دختر (یا نوه) ناشر اکثر آثارش ازدواج کرد اما پیش از آن، از سال ۱۸۱۴ در مدرسه پلی تکنیک تدریس و بر کرسی‌های دیگری در دانشکده علوم و کولژ دوفرانس نشست.

تسلط ریاضیات بر ریاضیدان

کوشی بر ریاضیات تسلط نیافت، بلکه ریاضیات بر او مسلط شد. هرگاه فکری به ذهنش خطور می‌کرد نمی‌توانست برای نشر آن لحظه‌ای انتظار بکشد، پیش از آن‌که ماهنامه «گزارش‌ها» بوجود آید، کوشی مجله‌ای خصوصی به نام «تمرین‌های ریاضی» منتشر کرد و در کمتر از ۲۰ سال، ماهنامه «گزارش‌ها» تعداد ۵۸۹ یادداشت از کوشی منتشر کرد.

کوشی ۱۶ مفهوم و قضیه در مبحث کشسانی دارد. معیارهای همگرایی را کشف و مطرح کرد و علامت حد را به‌کار برد، قضیه لاگرانژ و قضیه باقیمانده خود را به اثبات رسانید. در کتاب پرآوازه‌اش به نام «حساب حدها (۱۸۳۱- ۱۸۳۲)» مسایل مربوط به همگرایی و مسایل مربوط به رشته‌های هندسی ارایه داده شده‌اند. او مفهومی را که ما از تداوم یا پیوستگی داریم، ابداع کرد.

آگوستین کوشی، روی هم رفته بیش از هفت عنوان کتاب و ۸۰۰ مقاله انتشار داد. کتاب درسی او با عنوان «دوره تحلیل ریاضی» که در سال ۱۸۲۱ منتشر شد، تاثیر نیرومندی بر معاصرانش گذاشت.

کوشی در آثارش در نقل قول از همه ریاضیدانان روزگار خود دقیق‌تر بود. بیشتر آثار او حکایت از شتابزدگی دارند، اما نامرتب یا شلخته‌وار نوشته نشده‌اند. کوشی شانزده مفهوم و قضیه فقط در مبحث کشسانی دارد، یعنی تعداد مفاهیم و قضایای او از کل آثار تعدادی ریاضیدان دیگر بیشتر است و همه این مفاهیم در شکل نهایی خود ساده و بنیادین هستند.

«حساب حدها» و «نوشته‌ای درباره انتگرال‌های معین که بین دو حد موهومی گرفته شده‌اند» از جمله دیگر آثار این ریاضیدان فرانسوی است.

آگوستین کوشی، برخلاف «گاوس» که اکتشافات خود را پنهان می‌کرد، همه اکتشافات خود را به آکادمی فرستاد. او کسی بود که موفق شد اکتشافات گاوس را دوباره کشف کند. کتابش به نام «نوشته‌ای درباره انتگرال‌های معین که بین دو حد موهومی گرفته شده‌اند» که در سال ۱۸۲۵ منتشر شد، گام بلندی بود به سوی آنچه اکنون قضیه انتگرال کوشی نامیده می‌شود.

او انتگرال‌ها را در مسیرهای اختیاری در میدان مختلط تعریف کرد و از طریق معادله‌های دیفرانسیل کوشی، «ریمان» به وسیله حساب، تغییرات این واقعیت را استنتاج کرد. محصول کارش «قضیه باقیمانده» در مورد قطب‌ها بود که به وسیله «پ. آ. لوران» بسط یافت.

در سال ۱۸۴۶ مسیرهای انتگرال‌گیری بسته اختیاری را مطرح کرد و قضیه انتگرال خود را به وسیله آنچه امروزه فرمول «گرین» نامیده می‌شود، به اثبات رسانید. کوشی در سال ۱۸۲۲ ابزار اساسی ریاضی نظریه «کشسانی» را بوجود آورد (چیزی که عده‌ای آن را بزرگترین دستاورد وی به‌شمار می‌آورند). او معادله خود درباره تعادل صفحه کشسان را برپایه نیرویی واحد یعنی «کشش یا فشار» استوار کرد.

فهرست زیر مواردی است که به افتخار دانشمند سده نوزدهم فرانسه، آگوستین لویی کوشی نامگذاری شده‌اند:

آزمون همگرایی کوشی، دترمینان کوشی، توزیع کوشی، معادله کوشی، معادله کوشی-اولر، معادله تابعک کوشی، افق کوشی، فرمول انتگرال کوشی، قضیه انتگرال کوشی، ماتریس کوشی، معادله تکانه کوشی، عدد کوشی، مقدار اصلی کوشی، مساله کوشی، ضرب کوشی، معادلات کوشی، دنباله کوشی، سطح کوشی، نظریه کوشی (هندسه)، نظریه کوشی (نظریه گروه‌ها) و تانسور تنش کشی.

غروب یک ستاره درخشان علمی

آگوستین کوشی سرانجام در بیست و سوم مه سال ۱۸۵۷، در سن ۶۸ سالگی و در نزدیکی پاریس چشم از جهان فروبست.

مصاحبه

استاد بهمردی

گفت‌وگو صمیمانه با جناب آقای دکتر داریوش بهمردی

استاد چه طور شد که ریاضی رو انتخاب کردید؟!

من اول علاقه به هندسه داشتم و بعد از آن فیزیک بعد نجوم. مخصوصا هندسه که میتوانی با یک خط کشیدن به راحتی می شود یک سری مساله رو ساده کرد، در دهم ریاضی را انتخاب کردم، ولی پدرم چون خودشون در علوم طبیعی کار کرده بودند دوست داشتند من هم علوم طبیعی کار کنم.

و اینکه خودم به مهندسی علاقه مند نبودم، و من ریاضی ام در دانشگاه تربیت معلم وارد شدم، بعد سه سال و نیم درسم تموم شد و نفر اول شدم و میشد که بورس بگیرم ولی پدرم با رفتم مخالفت کرد و گفتند که همین جا بمون و ادامه بده.بعد یک جا بود برای مدرسی ریاضیات که ۱۴۰۱۳۰ نفر اومدن امتحان دادند و حدود سه چهار نفر را میپذیرفتند که من قبول شدم. که امتحان به صورت حضوری و شفاهی بود.بعد از آن که تموم شد وارد بازار کار شدم و ادامه دادم که بتونم بورس بگیرم برای ادامه تحصیل

چه گرایشی خوندید؟

من گرایش محض خوندم، و بعد آنالیز عددی که به هندسه نزدیک بود و من به توپولوژی ام علاقه داشتم ولی در دانشگاه باهاش آشنا شدم که در ادامه روی انالیز عددی و توپولوژی کار کردم

و برای علاقه مندی به فیزیکم روی معادلات دیفرانسیل کار میکردم چون میدیدم بهم مربوط هستند و فیزیک رو هم میخوندم

و بعد با کاربردی اشنا شدم که معادلات تدریس کردم

آن موقع هم که از مدرس ریاضی فارغ التحصیل شدم ،به عنوان استاد یار استخدام شدم و به صورت مربی نبودم .

بیشتر استاد های خارجی داشتیم یک استاد به اسم انتینی فوسکی دعوت شده بود یکی دیگر رودیو رآ بود که رودیو رِ آ ایتالیایی بود و آنتینی فوسکی برایَ شوروی بود و اَساتید ما به طور کلی خارجی بودن به جز دکتر غلامحسین مصاحب که ایشون تدریس میکرد دکتر فرودی و عالم زاده

بعد از فارغ التحصیلی میتونستیم دو سال در دانشگاه ها درس بدیم و به عنوان استاد یار درس میدادیم و بعد بورس میشدیم آمریکا و انگلیستان به همین دلیل رفتم مدرسه عالی اراک چون اگر میرفتی شهرستان دوساله بهت بورس میدادند و اگر تهران بودی سه ساله بهت بورس میدادند به همین دلیل من رفتم اراک و سال ۵۶ بود. و۵۷ انقلاب شد و همه اون برنامه ها بهم خورد و ما ماندیم منتظر بورس،امتحان زبان دادیم و پذیرش گرفتیم . مدت ها این می ماند، و خبرش اومد که پذیرش گرفتم از میشیگان پذیرش از دانشگاه سیدنی گرفتم یکی دیگر هم از کانادا گرفتم ولی خورد به انقلاب فرهنگی و خیلی از بوریسه ها راکد شد و من از اراک اومدم تهران و همینجا موندم.یک مدتی دانشگاه تربیت معلم بودم و بعد دانشگاه علم و صنعت و الزهرا بعد از انقلاب فرهنگی از یک سری اساتید دعوت کردند که تدریس کنند که من هم اومدم. بچه هایی که هم کلاسی من بودند،شاگرد من شده بودند و من درس مکانیک میگفتم و به من میگفتند ما را فارغ‌التحصیل کن و من اینکار رو کردم.

علم و صنعت و الزهرا را به صورت حق تدریسی میومدم و به دنبال انتقالی بودم به الزهرا که دکتر زندیه برای دید و بازدید عید نوروز رفته بودیم گفتند که من میخوام بهتون یک خبر خوب

بدم که استاد بهمردی رو موافقتشو گرفتیم که بیاد دانشگاه ما.چون دانشگاه تربیت معلم اجازه نمیداد من بیام بیرون. چون میگفت پیش خودمون تدریس کن.

چرا اونجا نموندین؟!

چون بافت قدیمی داشت و سنتی بودند و با مساله جدید نمیخواستن رو به رو بشن با اینکه خیلی تغییرات به وجود اومده بود.البته استاد های خیلی خوبی داشت

یک خاطره خاص تعریف میکنید از آن دوران؟!

من موسسه ریاضی قبول شدم ،دکتر مصاحب یک امتحان گرفت، بچه ها گفتند چند میشی گفتم من همرو نوشتم. گفتم اگه خیلی سخت صحیح کند من میشم ۱۹ و یکی از بچه های سال بالای بهم گفت که میشی ۹ و من گفتم عمرا ولی وقتی برگه ها اومد شده بودم ۸،حتی از جملات فارسی من هم ایراد گرفته بود و اولین بار بود که متوجه شدم نوشتن ریاضی تو زبان فارسی روش خاص خود رو دارد و در خاطرم موند چون نمره به این پایینی نداشتم. این برای ارشد بود.

برای کارشناسی مشکلی نداشتم چون گروه درس خونی داشتیم که همه استاد شدند یا در ایران یا خارج یا بازنشته شدند.

غلامحسین مصاحب خیلی معروف هستند و خواهرش سناتور بود.دو سه تا کتاب داشت و استاد خوبی داشت و یک دایره المعارف که تموم نکرد.یک مقتل منطق هم دارد که آن را دوست نداشت چون خوب نوشته نشده بود.

تا به حال شده نمره ها را روی نمودار ببرید؟ یا به کلاس ارفاق زیادی لحاظ کنید؟

چندین سال پیش نه ولی از ۱۰سال گذشته بله .درگذشته اگرکسی به طور مثال ۲ می گرفت همان ۲ را قرار می دادم و الان حس می کنم شاید واقعا اذیت می شدند البته من همیشه در این دانشگاه دانشجوهای خوب و درس خوان زیادی داشتم و خیلی از آنها اکنون دبیر های بازنشسته هستند .

بگذارید یک خاطره برای شما تعریف کنم، چندین سال پیش دانشجویی داشتم که هرکدام از درس های آنالیز را ۲ الی ۳بار بامن گذرانده بود بعد از مدتی یکی از همکلاسی هایش رادیدم که گفت فلانی را به یاد دارید گفتم بله چطور گفت او الان یکی از معروف ترین دبیرهای شهر دزفول می باشد.برایم خیلی جالب بود از او شماره اش راگرفتم وبا او تماس گرفتم به او گفتم خیلی خوشحالم که یکی از معروف ترین دبیرهای شهر دزفول هستی راز موفقیتت چه بود؟گفت درواقع من می دانم یک دانشجوی تنبل چه چیزی می خواهد پس من همان را به او می دهم و سخت گیری های شما در آن زمان باعث شد پایه آنالیز خوبی پیدا کنم و همین امر باعث شد دروس دبیرستان برایم راحت تر شود و اینک از موفقیتم بسیار خوشحالم.

حال برگردیم به موضوع ارفاق، قبلا دانشجوها از من میخواستن نمره هارا روی نموار ببرم و منم در جواب میگفتم شما به من یاد دهید که چگونه می توان نمرات را روی نمودار برد .این موضوع نیازمند دانش در درس امار بود برای همین تا به الان دانشجویی به من نگفته چگونه این کار را انجام دهم که منحنی نرمال شود چون دانشجوها علاقه به افزایش نمره به صورت شیفت یافته را دارند.

گاهی اتفاق افتاده که ۳نمره هم ارفاق کنم البته تحت شرایط خاص وبطور مثال اگردانشجویی نمره ۱۸ گرفته بود با افزایش ۳نمره ۲۱ می شد که خب ۲۰ می دادم و ازاو عذرخواهی می کردم چون یک نمره از نمره ی او ضایع شده بود.

وقتی از خارج برگشتم به موضوع جالبی برخوردم ،اگرکسی ۲ می شد به او ۹ و اگر کسی ۷ می شد بازهم به او ۹ می دادن و این برای من بسیار عجیب بود و دانشجوها هم به این روش عادت کرده بودن اما من این کار را انجام نمی دادم

به نظرشما یک محصل ریاضی در هفته به طور متوسط چقدر باید تمرین حل کند و چقدر باید وقت بگذارد؟

از نظر من هر واحد ریاضی نیاز به ۴ ساعت کاردارد که ۱ ساعت برای کلاس آن درس و ۳ساعت کارشخصی خود دانشجو. بطور مثال دانشجویی که ۱۲ واحد ریاضی دارد باید درهفته ۴۸ ساعت وقت بگذارد که ۱۲ ساعت آن کلاسهای آن درسهاست و ۳۶ ساعت کارشخصی خود دانشجو.

بیوگرافی

من سال ۷۱ به انگلستان رفتم و درکینگز کالج دکترا گرفتم و چندسال بعنوان مدرس و محقق در همانجا مشغول بودم و سال ۸۰ به ایران بازگشتم.

اهل یزد هستم و بسیار این شهر را دوست دارم.

از نظر شما کدام قضیه در ریاضی جالب تر است؟

در دوره کارشناسی قضیه تابع ضمنی و تابع معکوس به ویژه در توابع چندمتغیره

و در روره کارشناسی ارشد و دکترا قضیه سنتر منیفرد

شما چند فرزند دارید؟ آیا فرزندانتان هم به ریاضی علاقه مند هستند و این رشته را ادامه دادند؟

من دو فرزند دارم و هردو به ریاضی علاقمند بودند اما در این رشته ادامه تحصیل ندادند.

پسرم در حوزه هوش مصنوعی ادامه تحصیل داد و حتی از دانشگاه لیدز بورسیه داشت اما نرفت.

چرا ؟دلیلش چه بود؟

او دو دلیل داشت دلیل اول این بود که از نظر او تدریس و شغل معلمی بسیار استرس داشت و او حاضر نبود در ازای بورسیه تدریس کند

دلیل دوم هم این بود که او دوست داشت وقتی در خانه است دیگر درگیر درس نباشد و استراحت کند البته که اصلا این اتفاق رخ نداد و او همچنان درگیر درس است.

آیا همسرتان هم ریاضی خوانده است؟

خیر من ایشان را در دانشگاه تربیت معلم دیدم ایشان فوق لیسانس تاریخ دارد و واقعیت من دوست نداشتم همسرم ریاضی بخواند چون نمی خواستم از نظر افکار و اخلاق آنقدر شبیه هم باشیم .

شما چند سال است که در مسیر مطالعه ریاضی قرار گرفته اید؟

من از دبیرستان که انتخاب رشته کردم به طور تخصصی ریاضی را شروع کردم اما در دبستان و راهنمایی هم علاقه زیادی به ریاضی داشتم و الان ۶۸ سال دارم و بیش از نیم قرن هست که با ریاضیات سروکاردارم

البته خانواده من دوست داشتند من پزشکی بخوانم اما علاقه من در ریاضی بود و در تربیت معلم متوجه شدم که چقدر مسیر درستی انتخاب کردم

به نظر شما آیا می توان دروس ریاضی را تفکیک کرد؟

خیر واقعا ریاضی رو نمی توان تفکیک کرد چون از نظر من همه دروس به هم مرتبط اند و پیوسته اند اما اگربخواهم به طور کلی بگویم از نظر من زمانی که حد وجود دارد در آنالیز هستیم اما آنجا که عمل وارد شود وارد جبر می شویم.

البته این تجربه هم بخاطر تنوع تدریس هایی است که داشتم.

پیشنهاد شما به مخاطبین رادیکال دو چیست؟

به مخاطبین رادیکال دو پیشنهاد میدهم که خوب بخوانند خوب فکر کنند به چرایی ها فکر کنند و پاسخ چرایی هارا خودشان بدهند تا بتوانند درهر مسیر موفق شوند.

ما از دانشجوهای شما شنیده ایم که شما انتگرال را به نحوی بیان می کنید که بسیار متفاوت است دلیلش چیست؟

از نظر من انتگرال نهایتا همان جمع است یا اگر بخواهم واضح تر بیان کنم درجمع اگر تعداد نقاط متناهی باشد علامت جمع قرار می دهیم واگرتعداد اعداد شمارا باشد از سیگما استفاده می کنیم و اگر تعداد اعداد نامتناهی باشد و شمارا نباشد از s که همان انتگرال است استفاده می کنیم.

چکیده مقاله

مقدمه: بر اساس مطالعات صورت گرفته، گام نخست در کنترل و درمان دیابت نوع ۲، برنامه غذایی مناسب می‌باشد. شیوه‌های متعددی جهت تعیین برنامه غذایی مناسب برای بیماران دیابتی وجود دارد که با در نظر گرفتن مصرف متعادل پروتیین و کربوهیدرات‌ها و همچنین مصرف کم قندهای ساده و چربی ایجاد می‌شوند. هدف این تحقیق، تعیین برنامه بهینه غذایی با استفاده از مدل سازی برنامه‌ریزی خطی ریاضی، با هدف کمینه سازی چربی‌های اشباع و قندهای ساده دریافتی از مواد غذایی است.

روش‌ها: به عنوان نمونه، یک زن ۵۵ ساله، کم تحرک، با نمایه توده بدنی

۵۲ و مبتلا به دیابت نوع ۲ در نظر گرفته‌شد. با استفاده از (IMB

منابع کتابخانه‌ای ، میزان مورد نیاز روزانه و همچنین حداکثر میزان مجاز دریافت روزانه از مواد مغذی برای این فرد، مشخص گردید. کمینه سازی چربی‌های اشباع و قندهای ساده به عنوان اهداف مدل برنامه‌ریزی خطی ریاضی و حداقل و حداکثر میزان مجاز دریافت از مواد مغذی به عنوان قیدهای مساله در نظر گرفته‌شد. سپس برای حل این مدل از نرم‌افزار محاسباتی متلب استفاده‌گردید.

یافته‌ها: با توجه به توابع هدف، محدودیت‌های مساله و تنوع غذایی در وعده‌ها، اعداد مربوط به میزان مصرف مواد موجود در برنامه غذایی بهینه که در آن کمترین میزان چربی‌های اشباع و قندهای ساده مشاهده می‌شد، به دست آمدند.همچنین میزان دریافت روزانه انواع مغذی‌ها در این برنامه غذایی، به گونه‌ای مناسب حاصل شدند.

نتیجه گیری: استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی ریاضی می‌تواند در بهینه سازی برنامه غذایی بیماران دیابتی نوع ۲ با اهداف کمینه سازی چربی‌های اشباع و قندهای ساده، موثر باشد. در برنامه حاصل از پیاده‌سازی مدل ریاضی، ضمن برخورداری از تمامی گروه‌های غذایی، شاهد کمترین میزان چربی‌های اشباع و قندهای ساده خواهیم بود.

با گسترش خدمات بانکی و افزایش تقاضا برای دسترسی به منابع اطلاعاتی، وب سرورها عملکرد ضعیفی از جهت زمان پاسخ گویی از خود نشان می‌دهند. بنابراین ضروری است که از شبیه سازی و مدل‌های ریاضی در تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده، بهینه سازی و مدیریت سیستم‌های وب سرور استفاده شود.

در این مقاله خدماتی که از طریق اینترنت عرضه می‌شوند را به صورت یک سیستم صف معرفی و تحلیل می کنیم.

یکی از اجزای اصلی و تاثیرگذار در کیفیت خدمات اینترنتی، وب سرورها هستند. بنابراین با استفاده از مفاهیم صف و شبیه سازی، عملکرد وب سروها را تجزیه و تحلیل و بهینه می کنیم. یکی از نکات برجسته در این مقاله تحلیل مسئله‌ای برگرفته از دنیای واقعی در حوزه اینترنت و همچنین تحلیل جدیدی از درخواست‌های کاربران در وب سرورها می‌باشد. هدف در این مقاله، کسب رضایت کاربر و پاسخ‌گویی در کمترین زمان ممکن برای هر کاربر است. در این مقاله پس از معرفی ساختارهای مسئله، از رویکرد شبیه سازی و مفاهیم صف برای تحلیل و بهینه سازی و مدیریت سیستم‌های وب سرور استفاده می‌شود و در پایان خلاصه‌ای از نتایج محاسباتی شبیه سازی آورده شده است.

امروزه با توسعه فناوری اطلاعات و ارائه‌ی انواع خدمات اینترنت، مباحث مدیریت شبکه و فراهم نمودن کیفیت خدمات مطلوب جزء مسائل مهم بشمار می‌آید. علاوه بر این، اینترنت شبکه جهانی است که میلیون‌ها نفر در سراسر جهان از طریق آن به تبادل اطلاعات می‌پردازند و این مسئله نیز به نوبه خود بر افزایش تقاضا و ترافیک وب تاثیرگذار خواهد بود. بنابراین یکی از مهمترین مسائل در این حوزه، ارائه کیفیت خدمات مورد نیاز کاربران و عملکردی مناسب در این زمینه است. از معیارهای ارزیابی عملکردی در این زمینه، می‌توان به زمان پاسخ گویی (زمان انتظار در سیستم) ، راندمان وب سرورها، درصد ورود ناموفق کاربر و... اشاره نمود.

از طرفی یکی از مهمترین عوامل تاثیرگذار در سوددهی کسب و کار، به کارگیری ابزارهای فناوری اطلاعات و ارتباطات است که به دنبال آن سازمان‌ها با ایجاد صفحات وب و ارائه‌ی خدمات الکترونیکی برای خود مزیت رقابتی ایجاد می کنند. بنابراین، جهت برخورداری از مزایای خدمات الکترونیکی، شرکت‌های ارائه دهنده، ملزم به ارائه سطح مطلوبی از خدمات هستند. بر این اساس یکی از مباحث مهم در زمینه خدمات الکترونیک، مقوله کیفیت خدمات الکترونیک است که امروزه مطالعات بسیاری پیرامون آن در حال انجام است.

مفهوم کیفیت، معانی مختلفی با توجه به حوزه کاربردی خواهد داشت. از این رو از دیدگاه تولیدکننده به معنی توانایی محصول از لحاظ عملکردی و از دیدگاه مشتری به معنای ارضای خواسته تلقی می‌شود. کیفیت خدمات الکترونیکی دارای ابعاد مختلفی چون پاسخ‌گویی، رضایت کاربر، کارایی، نوآوری، امنیت و پشتیبانی و کیفیت دستیابی و محتوا است که در این مقاله، به ابعاد پاسخ‌گویی و رضایت کاربر پرداخته می‌شود.

بنابراین برای دست‌یابی به این هدف، به دنبال راهکارهایی خواهیم بود که عملکرد سیستم‌های وب سرور را به منظور کاهش زمان پاسخ‌گویی و افزایش رضایت کاربر بهبود دهد. به طور کلی این راهکارها را به دو گروه نرم افزاری و سخت افزاری تقسیم بندی می کنیم. از جمله راهکارهای نرم افزاری در زمینه بهبود کیفیت خدمات در اینترنت، الگوریتم های مسیریابی و زمانبندی در تخصیص جریان ورودی به وب سرورها و ایجاد تعادل بار در آنها، انقضای مهلت، ... و در مقابل، اضافه نمودن وب سرور و یا ارتقای آن، افزایش پهنای باند، طراحی زیرساختی و توپولوژی شبکه و ... را به عنوان راهکارهای سخت افزاری می‌توان نام برد.

هدف از این مقاله، استفاده از راهکارهای نرم افزاری، شبیه سازی و مدل‌های ریاضی برای تجزیه و تحلیل عملکرد وب سرورها درحوزه مدیریت و بهینه سازی شبکه اینترنت است. برای این منظور با تعیین متوسط مدت انتظار کاربر در سیستم از طریق مفاهیم صف و شناسایی عوامل تاثیرگذار به این هدف خواهیم رسید.

در این مقاله، سیستم صفی را در نظر گرفته‌ایم که کاربرانی از جمعیت نامحدود با تقاضاهای مختلف به وب سایتی مراجعه می‌کنند و تقاضای خود را در قالب تعداد مشخصی از درخواست‌ها به سیستم ارائه می‌کنند. بنابراین هر کاربر به محض ورود به سیستم، درخواست‌های خود را با یک فاصله زمانی تصادفی به وب سرور ارسال می‌کند و تا دریافت پاسخ تمامی درخواست‌ها از طرف وب سرور در سیستم باقی می‌ماند و در این شرایط، بین دو درخواست متوالی از یک کاربر، درخواست‌هایی از کاربران دیگر در صف وب سرور قرار می‌گیرد.

در این مدل، سیستم را با یک وب سرور (خدمت دهنده) به همراه محدودیت ظرفیت سیستم برای کاربران تعریف می‌نماییم. بدین ترتیب، درخواست‌های کاربران به ترتیب ورود، در صف درخواست‌های وب سرور قرار می‌گیرند و مطابق با نظم OFIF از صف خارج می‌شوند.

در ادامه به فرضیات و پارامترهای مدل و همین طور مدل شبیه سازی و پارامترهای مدل شبیه سازی می‌پردازیم.

و به این نتیجه می‌رسیم که :.

در این مقاله، عملکرد وب سرورها را به عنوان یکی از اجزای موثر در کیفیت خدمات وب سایت‌ها با استفاده از مفاهیم تئوری صف و اصول شبیه سازی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌ایم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی میزان تاثیر سرعت و ظرفیت وب سرور را بر متوسط زمان انتظار کاربران نشان داد؛ در نتیجه، مدیران وب سایت‌ها می‌توانند با استفاده از نتایج حاصل از این تحقیق، تصمیمات مناسبی را در جهت بهبود کیفیت خدمات اخذ نمایند. در مقایسه بین مقادیر به دست آمده براساس وارد نمودن فرضیاتی در مدل شبیه سازی و نتایج حاصل از تحلیل مدل‌های صف موجود، مقادیر تعداد و زمان انتظار درخواست و کاربر در سیستم تفاوت چشمگیری را از خود نشان نداد؛ در نتیجه، نتایج مدل شبیه سازی مورد تایید خواهد بود.

استیون وجدا از بزرگان بهینه سازی

استیون وجدا در بوداپست در سال ۱۰۹۱ ، از یوزف(پدر) و اورلیا ولاک (مادر او)متولد شد. خانواده وی در سال ۳۰۹۱ به وین نقل مکان کردند و در این شهر استیون پرورش یافت و تحصیل کرد. او ریاضیات خواند و دکتر فیل گرفت. دارای مدرک در سال ۵۲۹۱ از دانشگاه وین است. یکی از اولین ملاقات‌های او در رومانی بود، جایی که او مشاور حقوقی دولت رومانی بود. وی سرانجام برای ادامه کار خود به عنوان وکتور به وین بازگشت و در سال ۹۲۹۱ در آنجا ازدواج کرد.

در سال ۹۳۹۱ ، استیون، همسر اوا و دو فرزندشان ، هدی و روبرت، از رژیم نازی که در آنشلوس ۸۳۹۱ اتریش را تصرف کرده بود فرار کردند. بچه‌ها به سوئد فرستاده شدند و اوا به عنوان خدمتکار داخلی در انگلستان پذیرفته شد. دوست استیون، کارل پوپر، اتریش را ترک کرده‌بود و به عنوان مقیم نیوزلند و مدرس فلسفه در کالج دانشگاه کانتربری، کاری را برای استیون پیدا کرد و به او کمک کرد تا مدارک لازم را تهیه کند. استیون سپس توانست وارد انگلستان شود زیرا فقط در حال حمل و نقل بود. برنامه این بود که خانواده خود را در انگلستان متحد کرده و سپس عازم نیوزلند شوند، اما قبل از آنکه این اتفاق بیفتد، جنگ جهانی دوم شروع شد و وجدا برای مدت کوتاهی به عنوان «بیگانگان دشمن» بازداشت شدند. آن‌ها در اردوگاهی در جزیره من به همراه دیگر پناهندگان از سراسر اروپا اسکان داده شدند. مهاجرین مدرسه‌ای را برای فرزندان خود ترتیب دادند و البته استیون ریاضیات نیز تدریس می‌کرد. اکثر بازداشت شدگان پس از چند ماه آزاد شدند و استیون به عنوان وکیل مشغول به کار شد.

در همین حال، ریاضیدانان تقاضا داشتند که گروه‌های تحقیقاتی عملیاتی نظامی تازه تأسیس شده را استخدام کنند سیل که با گروه، نشریات تحقیقاتی استیون را در(sessius serautca sed ntielluB خوانده بود، و هنگامی که متوجه شد استیون در انگلستان است، او را پیدا کرد و پیشنهاد داد که به جنگ بپیوندد. پس از مانورهای بوروکراتیک فراوان، استیون به خدمات علمی نیروی دریایی سلطنتی دریاسالاری بریتانیا پیوست. هنگامی که جنگ به پایان رسید، سیل (laes.h)متوجه شد که استیون یکی از اولین «بیگانگان» ای است که تابعیت بریتانیا دریافت کرد. استیون تا سال ۴۶۹۱ در دریاسالاری اقامت داشت و قرارهایی را به عنوان دستیار مدیر تحقیقات عملیاتی و رئیس گروه ریاضی برگزار کرد. در سال ۴۶۹۱ ، او «بازنشسته» شد.

در سال ۴۶۹۱ ، استیون استاد تحقیقات عملیاتی در دانشگاه بیرمنگام شد. در سال ۷۶۹۱ ، او در بیرمنگام در یک ملاقات تحقیقاتی در زمینه آمار ریاضی، با هنری دانیلز گاردین، دیوید ویشارت و ویک بارنت کار کرد. او تا سال ۳۷۹۱ ماند، هنگامی که به دستور پروفسور پت ریوت، بار دیگر «بازنشسته» شد تا به عنوان استاد مهمان ریاضیات در دانشگاه ساسکس(xessus) تبدیل شود. او تا سال ۵۹۹۱ در برایتون، دو سال پس از تولد اولین نوه بزرگش الکساندرا اوا (به نام همسرش) ، عضوی فعال از کارکنان ساسکس بود.

استیون وجدا (۰۲ آگوست ۱۰۹۱ - ۰۱ دسامبر ۵۹۹۱) بیش از پنجاه سال نقش مهمی در توسعه برنامه نویسی ریاضی و تحقیقات عملیاتی ایفا کرد. او عضو حلقه‌ای از محققان مبتکر بود که شامل جورج دانتزیگ، آبراهام چارنز، دبلیو دبلیو دبلیو دبلیو. کوپر، ویلیام اورچارد هیس، مارتین بیل و دیگران. او از سال ۵۲۹۱ تا ۵۹۹۱ به عنوان مجری و ریاضیدان در تحقیقات عملیاتی کار کرد و تدریس کرد.

از سال ۹۳۹۱ تا زمان مرگش در ۵۹۹۱ ، او در انگلستان زندگی می‌کرد و در آنجا دانشمند دفاعی خدمات علمی نیروی دریایی سلطنتی و استاد دانشگاه بیرمنگام و ساسکس بود. او همنشین انجمن تحقیقات عملیاتی، همکار انجمن آمار سلطنتی، عضو موسسه آمار ریاضی و عضو انجمن ریاضی بود.

او نویسنده حداقل ده کتاب در زمینه برنامه نویسی ریاضی، نظریه بازی‌ها، برنامه ریزی و آمار نیروی انسانی و بسیاری از نشریات مجلات و مقالات کنفرانسی است.

مصاحبه

استاد تجویدی

۱. شما چطور وارد رشته ریاضی شدید؟

از دبیرستان عاشق ریاضی بودم و از اینکه معلم میگفت از این راه حل کنید دوست داشتم راه دیگر را امتحان کنم و از اثبات‌های تکراری خسته می‌شدم و ۲۷۳۱ وارد دانشگاه شدم تا الان.

انقدر ریاضی را دوست داشتم موقع انتخاب رشته خانواده دوست داشتند که من معماری را انتخاب کنم چون فرزند اول خانواده‌ام بودم ولی من اول همه ریاضی‌ها را زدم و در آخر معماری را زدم، هرچند که ریاضی رو میشه در رشته های دیگر هم دید، به هر حال من اولین انتخابم ریاضی شریف بود و همان را قبول شدم.

چهارم دبیرستان معلم هندسه تحلیلی داشتیم که باید همه چیزرا مجسم کنیم ولی بچه‌ها نمی‌خواستند باشه ولی من خیلی با بچه‌ها صبحت کردم که بتونم معلم را نگه دارم که بچه‌ها عوضشون نکنند. ریاضی را در زندگی خیلی دوست داشتم. خواندن کتاب استاد شهریاری و پیگیری بچه‌های المپیاد برای اینکه ببینیم در ریاضی چه خبرهست خیلی موثر بود.

نمره ریاضی برایم مهم بود این که بتونم سوالات خاص امتحان را حل کنم و با خودم رقابت می‌کردم.

نمره دلیل بر ساخته شدن ذهن برای ریاضی نیست باید زنجیره‌ی فکری خودمان را بسازیم.

دلیل انتخاب ریاضی، علاقه و فکر کردن بهش باعث لذتم می‌شد.

زمانی که متن ریاضی روبه رویم هست اون زمان جزو زندگیم حساب نمیشه و عاشق تدریس ریاضی‌ام هستم.

۲. کارشناسی ارشد در کدام دانشگاه تحصیل کردید؟

در مقطع کارشناسی شریف بودم.

ولی کارشناسی ارشد دانشگاه امیرکبیر آنالیز عددی خواندم.

ترم اول ارشد به دانشگاه شریف سر می‌زدم و با دکتر مریم میرزاخانی و دکتر محمودی کلاس می رفتم.

وقت آزادم را خونه نمی‌رفتم و از امیرکبیر می‌رفتم شریف از شریف به امیرکبیر.

مقالات و کتاب‌ها را نگاه می‌کردم که چون اینترنت نبود باید خیلی می‌گشتم.

دکتری به دانشگاه شریف برگشتم معادلات تصادفی خواندم ولی با استاد راهنما مشورت کردم و تز دکتری‌ام را عوض کردم.

۳. در مقطع دکتری به چه گرایشی مشغول بودید؟

آنالیزعددی. وقتی به دانشگاه الزهرا آمدم، دروس تحقیق در عملیات را نگاه کردم و بنابر علاقه تحقیق در عملیات خوندم و با بچه‌ها تحقیق در عملیات کار کردم.

۵. از اولین تجربه شغلی‌تان بگید؟

در شرکت نفت بخش تحقیق و توسعه کار می‌کردم.

نمره دلیل بر ساخته شدن ذهن برای ریاضی نیست باید زنجیره فکری خودمان را بسازیم

پروژه می‌گرفتم و با بچه‌های دیگر آنجا بحث ریاضی می‌کردم

و همزمان تدریس در امیرکبیر داشتم. به دانشگاه الزهرا که درخواست دادم همزمان با به دنیا آمدن دخترم بود و جای دیگری نیز نرفتم، چون مادر بودم و باید مسئولیت مادری‌ام هم انجام می‌دادم، برای تدریس تلاش کردم اما خودم از خودم راضی نیستم چون خیلی آدم ایده‌آل گرایی هستم.

۶. چه آینده‌ای برای این گرایش در جهان پیش‌بینی می کنید ؟

در دنیا کار، کار ترکیبی است. مثلا روی مسئله‌ای در آنالیز عددی کار می‌کنم که در ادامه به ماشین لرنینگ کشیده می‌شود. همه چیز بهم ربط دارند و مرزهای سفت و سختی ندارند و به نظرم نیازی به مرزبندی ندارد، البته زمانی که ریاضی کاربردی کار می‌کنید باید ریاضی محض را خیلی خوب بلد باشید.

۸. یکی از خاطرات دوران کارشناسی‌تان را تعریف کنید.

کلاس دکتر شهشهانی می‌رفتم و آدم های المپیادی بودند و من فکر نمی‌کردم ایشون من را بشناسند و بعد از کلاس توابع مختلط وقتی که اومدیم بیرون یکدفعه من را صدا

کردنـد و گفتنـد:((تجویـدی)). کـه هنـوز در ذهنـم هسـت و بابتـش خوشـحالم

در کلاس دیگرشـان مـن سـوالی را بلـد بـودم و دوسـت داشـتم جـواب بدهـم ولـی دسـت دسـت کـردم و نگفتـم وقتـی جـواب را دادنـد. همـان پاسـخ مـن بـود و خیلـی ناراحـت شـدم کـه چـرا نگفتـم، بـه نظـرم ایـن خاطـره میتونـه بـه بچـه هـا بگـه کـه ایـده هاشـون رو سـرکلاس بیـان کننـد.

خـوب یادمـه همیشـه ذوق ایـن را داشـتیم زمـان اسـتراحت بشـینیم تمریـن حـل کنیـم و بریـم پیـش اسـتادها و غلـط و درسـتی‌اش رو بپرسـیم.

۹. یکی از خاطراتتان را با دانشجویان تعریف کنید؟

یـک خاطـره از دورانـی کـه اسـتاد امیرکبیـر بـودم دارم، اولیـن ورودی ریاضـی برنامـه سـازی پیشـرفته داشـتیم و بایـد چهـار و سـی دقیقـه دنبـال دخترم می‌رفتـم. بـه بچه‌هـا گفتـم کـه سـاعت را بگوینـد امـا بچه‌هـا اونقـدر محـو درس شـده بودنـد کـه زمـان گذشـت و یـک کلمـه حـرف نـزده بودنـد، خیلـی خوشـحال بـودم کـه تمرکـز داشـتند و سـررذوق بودنـد. همـان ورودی را بـرای مسـابقات تحقیـق در عملیـات بردمشـان سـمنان و آن روز هـم خیلـی خـوش گذشـت و خاطـره شـد.

۱۱. مصاحبـه گـر بـا کمـی شـوخی میپرسـد: اسـتاد نمـره هـا رو روی نمـودار میبریـد؟!

خیـر روی نمـودار نمیبـرم. امـا عدالـت رو رعایـت می‌کنـم و فعالیـت کلاسـی را حتمـا در نظـر می‌گیـرم و اگـر از نظـر درسـی قـوی باشـند حتـی بهشـان ۲۰ می‌دهـم. چـون یادگیـری برایـم خیلـی مهم‌تـر هسـت.

۱۲. از نظر شما برای مطالعه ریاضی چقدر زمان نیاز است؟

بـه نظـرم بایـد بـرای هـر یـک سـاعت درس, یـک سـاعت درس را دوبـاره خوانـد و تمریـن کـرد. البتـه نبایـد دائـم درس خوانـد بایـد بـرای خانـواده و بقیـه زندگـی هـم وقـت گذاشـت. ولـی مهـم ایـن اسـت کـه پیوسـته باشـد, کـه خـودم تجربـه‌اش کـردم. ایـن موضـوع کـه بچه‌هـا سـاعت‌ها وقـت صـرف مطالعـه می‌کننـد ولـی کیفیـت نـدارد دلیلـش ایـن اسـت کـه پیوسـتگی نـدارد و خـوب نیسـت. بـه نظـرم کسـی کـه بـدون جـزوه و کمـک بتوانـد قلـم بـه دسـت بگیـرد و شـروع بـه حـل و توضیـح دادن کنـد, یعنـی درس رو فهمیـده اسـت. و زمـان تعیـن کننـده نیسـت.

۱۳. مدتـی کـه مدیـر گـروه بودیـد ارتباطتتـون بـا بچـه هـا بـه چـه شـکل بـود؟

مـن در گـروه ریاضـی فقـط سـه مـاه حضـوری رو تجربـه کـردم. و بقیـه در دوران کرونـا بـوده کـه کاری کـه توانسـته‌ام انجـام بدهـم ایـن بـوده کـه بتوانـم بـا آن‌هـا ارتبـاط داشـته باشـم، ۴ سـالی کـه مدیـر گـروه دانشـجویان علـوم کامپیوتـر بـودم دانـش جـو هـا در دانشـگاه بودنـد و ارتبـاط گیـری و بررسـی مسـائل راحتتـر بـود در

اون زمـان هـم سـعی کـردم دوسـتی خالـه خرسـه نداشـته باشـم و رخنه‌هـا را پرکنـم تـا بچه‌هـا و اسـاتید دچـار مشـکل نشـو ند .

۱۴. متولد کجا هستید؟

تهـران. ولـی پـدر و مـادرم متولـد گیـلان هسـتند. چـون مادرم دبیـر بودنـد, مـن پیـش پدربـزرگ و مادربزرگـم زندگـی کـردم و دوسـت نداشـتند مـن بـه مهـد بـروم. بعـد از سـه سـال و نیـم برگشـتم تهـران و گیلکـی میفهمـم ولـی نمیتوانـم صحبـت کنـم. در آخـر مادربزرگـم آمـد و بـا مـا زندگـی کـرد و مـن درس‌هایـم را بـه او توضیـح میـدادم. دوسـت دارم بـرم شـمال زندگـی کنـم ولـی شـرایط مهیـا نیسـت.

چیـزی کـه مـن را در دانشـگاه نگـه داشـته تدریـس هسـت و تحقیـق را می‌شـود در خانـه انجـام داد.

۱۷. سخن آخر؟

بچه‌هـا بـه فکـر خودشـون باشـن و کلـی نگـر باشـند و مثـل مسـئله بهینـه سـازی بـه زندگـی نـگاه کننـد کـه محدودیت‌ها را بپذیرنـد و شـروع بـه کار کننـد و دنبـال یادگیـری باشـند و اجـازه بدهنـد بهـره ریاضـی بهشـان برسـد کـه در آخـر کولـه بـار ریاضـی داشـته باشـند. تحقیـق کننـد ودر انجمـن باشـند وکارهـای تحقیقاتـی و علمـی انجـام بدهنـد، خـوب درس بخواننـد امـا بـه خوانـدن کفایـت نکننـد.

گراف یا **نِگار** در ریاضیات دست‌کم دارای دو معنی می‌باشد. در ریاضیات پایه گراف اشاره به نمودار تابع دارد، و در اصطلاح ریاضی‌دانان، گراف مجموعه‌ای از نقاط و خطوط به هم پیوسته است.

در واقع گراف مدلی ریاضی برای یک مجموعه گسسته است که اعضایش به گونه‌ای با هم پیوند دارند. اعضای این مجموعه می‌توانند چند انسان باشند و ارتباط میان آن‌ها دست‌دادن با یکدیگر باشد. اعضا می‌توانند اتم‌ها در یک مولکول باشند و ارتباطشان پیوندهای شیمیایی باشد یا این که اعضا می‌توانند بخش‌های گوناگون یک زمین و ارتباط میانشان، پل‌هایی باشد که آن‌ها را به هم می‌پیوندانند (همانند مسئله کونیگسبرگ).

نظریه گراف یکی از موضوع‌های مهم در ریاضیات گسسته است که به شناخت گراف‌ها و مدل‌بندی مسایل با آن‌ها می‌پردازد.لئونارد اویلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسئله پل های کونیگسبرگ نظریه گراف‌ها را بنیان گذاشت. اما جیمز جوزف سیلوستر نخستین کسی بود که در سال ۱۸۷۸ این مدل‌های ریاضی را گراف نامید.

کاربردهای گراف

نظریه گراف کاربردهای زیادی در علوم مختلف و رشته‌های مهندسی دارد که برخی از آن‌ها به‌شرح زیر است:

- مهندسی برق: گراف در مهندسی برق برای نمایش اتصال مدارها به کار می‌رود. برخی از این اتصالات به عنوان ستاره، مثلث، سری و موازی شناخته می شوند.
- علوم کامپیوتر: یکی از کاربردهای گراف در علوم کامپیوتر، مطالعه الگوریتم‌ها است. همچنین، برای بیان رابطه بین کامپیوترها در شبکه، از گراف‌ها استفاده می شود.
- علوم: ساختار مولکولی و شیمیایی ماده، ساختار DNA و... از مواردی هستند که برای نمایش آن‌ها از گراف‌ها استفاده می‌شود.
- زبان‌شناسی: گراف‌ها، برای نمایش نمودار درختی تجزیه و دستور زبان نیز به‌کار می‌روند.
- عمومی: نمایش مسیرهای بین شهرها نیز یکی از کاربردهای عمومی نظریه گراف است.

از گراف‌ها برای حل مسایل زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده می‌شود. ساختارهای زیادی را می‌توان به کمک گراف‌ها به نمایش درآورد. برای مثال برای نمایش چگونگی رابطه وب سایت‌ها به یکدیگر می‌توان از گراف جهت‌دار استفاده کرد. به این صورت که هر وب سایت را به یک راس در گراف تبدیل می‌کنیم و در صورتی‌که در این وب سایت لینکی به وب سایت دیگری بود، یک یال جهت دار از این راس به راسی که وب سایت دیگر را نمایش می‌دهد وصل می‌کنیم.

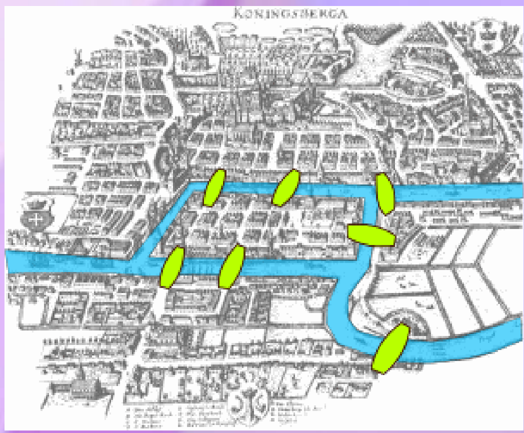
از گراف‌ها همچنین در شبکه‌ها، طراحی مدارهای الکتریکی، اصلاح هندسی خیابان‌ها برای حل مشکل ترافیک، و... استفاده می‌شود. مهم‌ترین کاربرد گراف مدل‌سازی پدیده‌های گوناگون و بررسی آن‌ها است. با گراف می‌توان به راحتی یک نقشه بسیار بزرگ یا شبکه‌ای عظیم را در درون یک ماتریس به نام ماتریس وقوع گراف ذخیره کرد یا الگوریتم‌های مناسب مانند الگوریتم دایسترا یا الگوریتم کروسکال و... را بر روی آن اعمال نمود.

کاربرد گراف بازه‌ها از گراف‌ها برای حل مسایل زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده می‌شود. ساختارهای زیادی را می‌توان به کمک گراف‌ها به نمایش درآورد.

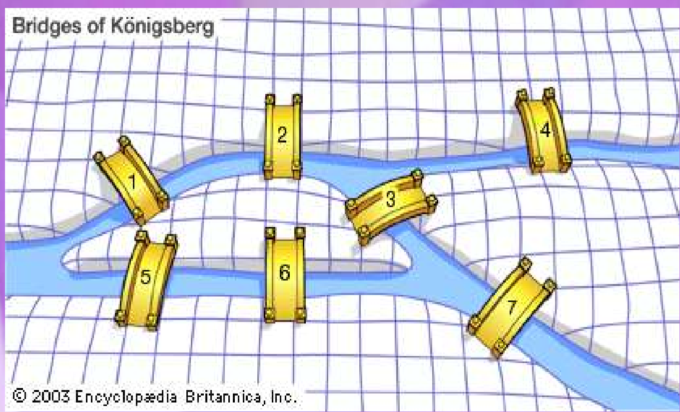
درخت و ماتریس درخت در رشته‌های مختلفی مانند شیمی مهندسی برق و علم محاسبه کاربرد دارد. کیرشهف در سال ۱۸۴۷ میلادی هنگام حل دستگاه‌های معادلات خطی مربوط به شبکه‌های الکتریکی درخت‌ها را کشف و نظریه درخت‌ها را بارور کرد. کیلی در سال ۱۸۵۷ میلادی درخت‌ها را در ارتباط با شمارش ایزومرهای مختلف هیدروکربن‌ها کشف کرد. اگر هزینه کشیدن مثلاً راه‌آهن بین هر دو شهر از p شهر مفروض مشخص باشد ارزان‌ترین شبکه‌ای که این p شهر را به هم وصل می‌کند با مفهوم یک درخت از مرتبه p ارتباط نزدیک دارد. به جای مسئله مربوط به راه‌آهن می‌توان وضعیت مربوط به شبکه‌های برق‌رسانی و لوله‌کشی نفت و لوله‌کشی گاز و ایجاد کانال‌های آبرسانی را در نظر گرفت. برای تعیین یک شبکه با نازل‌ترین هزینه از قاعده‌ای به نام الگوریتم صرفه‌جویی استفاده می‌شود که کاربردهای فراوان دارد. از گراف‌ها می‌توان به عنوان کدهای کمکی نام برد که بهDVB Playerها در بالا بردن قابلیت‌های آن‌ها کمک می‌کنند. گراف‌ها دارای مزایای مختلفی هستند که شفاف‌تر و واضح‌تر کردن تصویر و کاهش مصرف CPU به عنوان یکی از اصلی‌ترین مزایای آن‌ها به‌شمار می‌رود.

تاریخچه

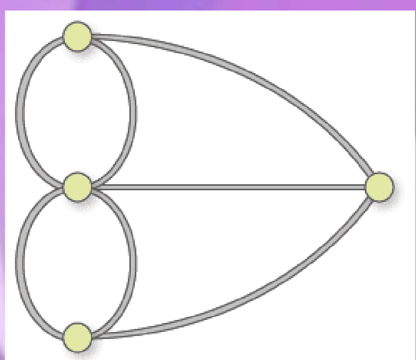
شاید بتوان نقطه آغاز پیدایش نظریه گراف را در قرن هجدهم میلادی و مسئله پل‌های کونیگسبرگ یافت. مسئله «پل‌های کونیگسبرگ»، به هفت پل شهر کونیگسبرگ برمی‌گردد که امروزه از نظر جغرافیایی در کالینینگراد روسیه واقع شده است.



این هفت پل، برای ارتباط بین خشکی‌های دو طرف رودخانه‌ای به‌نام پرِگِل احداث شده بود. اما مسئله‌ای که به این پل‌ها ارتباط داشت این بود: «آیا می‌توان از نقطه‌ای شروع به قدم زدن کرد و همه پل‌ها را پیمود؟». در سال ۱۷۳۶، اویلر نشان داد که این کار غیرممکن است. اویلر، ابتدا نقاطی را متناظر با هر یک از قسمت‌های خشکی مشخص، سپس آن‌ها را با خطوطی که نماینده پل‌ها بود، به یک‌دیگر متصل کرد.



اگر به چینش پل‌ها در شکل بالا نگاه کنیم، می‌بینیم که باید ۴ نقطه و ۷ خط داشته باشیم. در حقیقت، اویلر چیزی شبیه شکل زیر را به‌دست آورد که به عنوان یک گراف شناخته می‌شود.



در واقع، اویلر ثابت کرد برای آنکه مسیر از یک رأس شروع شود و از همه یال‌ها یک بار عبور کند و به همان رأس بازگردد، باید گراف همبند بوده و مرتبه هر یک از رأس‌های آن نیز زوج باشد.

چند مسئله از گراف

۵۷-۵ نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند که هر کدام از آن‌ها به دو نفر دیگر نامه فرستاده باشد. به چند طریق این عمل امکان پذیر است به شرط آن‌که هر نفر به آن دو نفری نامه فرستاده باشد که از آنها نامه دریافت کرده است؟

۱) ۶۰　　۲) ۱۲

۳) ۲۴　　۴) غیرممکن

۱) هیچ کس به خود نامه نمی‌نویسد - گراف طوقه ندارد
۲) هیچ کس بیشتر از یک نامه نمی‌نویسد - یال موازی نداریم
۳) هرکس به شخصی نامه می‌نویسد که از او نامه دریافت کرده باشد - گراف جهت ندارد یا به عبارتی هر رفتی بازگشتی دارد.

از این موارد نتیجه می‌گیریم که گراف ساده هست.
هر شخص به دو نفر نامه می‌نویسد، پس گراف ما گراف ۲ منتظم از مرتبه ۵ است.
پس فقط شکل پنج ضلعی می‌تواند باشه.
حال باید ببینیم اگر افراد a و b و c و d و e باشند، چند حالت داریم، مانند این‌که با این مهره‌ها چه‌طور می‌توان دستبند درست کرد.
طبق فرمولش میشه ۱-۵ فاکتوریل تقسیم بر ۲ و میشه ۱۲.
راه حل دیگر:
یک مهره را ثابت فرض می‌کنیم و جایگشت بقیه را حساب می‌کنیم، با توجه به تقارن نصف حالات تکراری می‌شواد پس باید حاصل تقسیم بر ۲ شود و باز هم جواب ۱۲ است.
سوال
درگراف ناهمبند و r منتظمG=(V,E) اگر مرتبه و اندازه را به ترتیب با p,q نشان دهیم، رابطه‌ی ۱+q=p+r برقرار است. r کدام است؟

۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

پاسخ
گزینه ۲ صحیح است.
۱+Q=p+r
۲q=pr

۱+p+r=۲/Pr
۲=۲r-۲p-Pr
۲=۲r-(۲-P(r
۶=۴+۲r-(۲-P(r
۶=(۲-r)۲-(۲-P(r
۲*۳=۶*۱=(۲-p)(۲-r)

۲=۲-r　　یا　　۱=۲-r

۳=۲-p ۶=۲-p

۴=r ۳یا
چون گراف باید ناهمبند باشد پس ۳=r و۸=p.

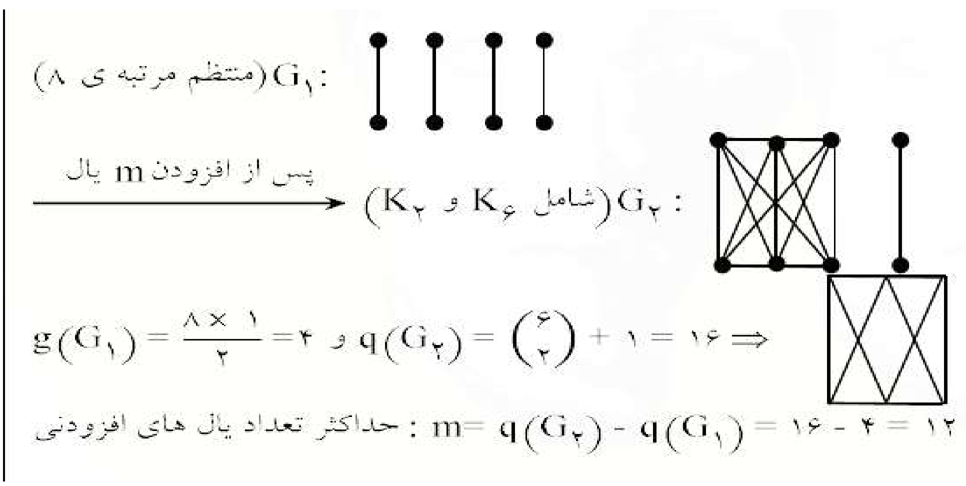
****

سوال
اگر Aماتریس مجاورت گراف ساده‌ای باشد که بین هر دو راس آن دقیقا یک مسیر وجود دارد و این ماتریس دارای ۳۷ درایه صفر باشد. آنگاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس ۲^A کدام است؟
۸ ۱۰ (۲ ۱۲(۳ ۱۸(۴

پاسخ
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: تعداد صفرهای ماتریس مجاورت یک گراف با p راس و q یال برابر است با .۲q-۲^p
A ماتریس مجاورت مربوط به یک درخت است بنابراین داریم:

۳۷=۲q-۲^p
۳۷=۲q-۲^(۱+q)
۶=Q
۲q=۱۲=مجموع درایه های قطر اصلی ۲^A

****
سوال
به گراف ساده ۱منتظم مرتبه ۸، حداکثر چند یال می‌توان اضافه کرد به‌طوری‌که گراف حاصل ناهمبند باقی بماند؟
۷ ۱۲ (۲ ۱۹(۳ ۲۴(۴
پاسخ
گزینه۲ صحیح است
حداکثر تعداد یال‌ها وقتی بدست می‌آید که گراف حاصل از دو بخش جدا ازهم k_۶,۲_k تشکیل شده باشد.
پس:



گراف های بازه ای کاوشگر

گراف های بازه ای کاوشگر به عنوان تعمیمی از گراف های بازه ای، در ایجاد نقش فیزیکی و تعیین توالی DNA استفاده می شوند.دراین مقاله نشان داده شده است که گراف های بازه ای کاوشگر ،ضعیفا وتری و در نتیجه بی نقص هستند.
علاوه بر این ، گراف های بازه ای کاوشگر بنا به ترتیب متوالی خوشه های درونی آن ها مشخص شده اند.

DNA ، ماده ژنتیکی است که انتقال صفات از نسلی به نسل دیگر را به عهده دارد .مولکول DNA از دو رشته موازی ساخته شده است که به شکل نردبانی در اطراف یک محور فرضی پیچیده شده اند .نرده های این نردبان را مولکول های فسفات و قند وپله های آن را بازهای آلی آدنین (A)،تیمین (T)، گوانین (G) و سیتوزین (C) تشکیل داده اند.ترتیب بازها روی یک رشته توالی DNA نامیده می شود.به منظور مطالعه قطعه ای از مولکول دراز DNA، ابتداDNA بوسیله آنزیم های خاص به اجزای کوچکتر برش داده می شود. آنگاه DNAی برش داده شده را به درون یک ناقل نظیر پلاسمید، کاسمید و ....وارد می کنند. به عبارت دیگر DNAی مورد نظر به گونه بسیار ماهرانه و حساب شده ای در درون ژنوم ناقل وارد می شود و در نتیجه مولکول دورگه یا DNAی نوترکیب شکل می گیرد که آن را کلون می نامند.گام بعدی فرستادن مولکول DNAی دورگه به درون سلول میزبان مناسب است. میزبان مطلوب جایی است که مولکول DNAی دورگه قادر است با سرعت زیاد تکثیر شده و در زمان اندک هزاران و میلیون ها نسخه همانند از آن تهیه شود .به طور کلی به چنین روش از تکثیر و همانند سازی قطعه ای از مولکول DNA در سلول های میزبان مناسب، کلونینگ آن قطعه گفته می شود که نتیجه آن یک کتابخانه از کلون ها است. بعد از آن قطعه های کلون شده دوباره به اجزای کوچیکتری برش داده می شوند تا باجزئیات بیشتری توالی شوند. بعد از این که هر جزء به طور دقیق تعیین توالی شد باکنارهم قرار دادن توالی ها ،توالی کلی DNA با جزئیات به دست می آید.درایجاد یک کتابخانه از کلون ها ترتیب نسبی اجزا در طول مولکول DNA از بین می رود، لذا یک مساله اساسی در زیست شناسی مولکولی بازسازی این ترتیب است.به منظور بازسازی ترتیب قرار گرفتن کلون ها روی مولکول DNA، باید کلون هایی که باهم اشتراک دارند پیدا شوند و در کنارهم قرار داده شوند.یک روش برای ایجاد کلون های هم پوشان در ایجاد نقشه کروموزوم ۱۳ انسان استفاده شد.دراین روش (ایجاد نقشه توالی های هم پوشان کاسمید)اشتراکات با استفاده از کلون های ویژه ای به نام کاوشگر بوسیله دورگه سازی پیدا می شوند.یک کاوشگر قطعه ای کوچک از DNA است که لزوما یکتا نیست.در این روش مجموعه ای از کلون ها برای دورگه سازی روی یک فیلتر قرار داده می شوند و فیلتر به وسیله کلونی که با رادیواکتیو برچسب گذاری شده کاوش می شود.کلون کاوشگر اشتراکات را بوسیله دورگه سازی مشخص می کند. به این صورت که اگر یک کلون شامل یک توالی متمم باتوالی کلون کاوشگر باشد کلون کاوشگر با آن عمل دو رگه سازی انجام می دهد و به این ترتیب اشتراکات بین کلون کاوشگر و دیگر کلون ها مشخص می شوند.این روش بسیار موثر است،زیرا نقشه می تواند با استفاده از یک زیر مجموعه از کلون ها به عنوان کاوشگر به دست آید.اگر فقط یک زیر مجموعه از کلون ها به عنوان کاوشگر مورد استفاده قرار بگیرند اشتراکات بین کلون هایی که کاوشگر نیستند قابل تشخیص نیست. لذا مجموعه اشتراکات کامل را در اختیار نداریم. یک ابزار مفید در بازسازی DNA گراف های بازه ای هستند.هنگامی که مجموعه اشتراکات کامل دراختیار باشند یعنی مشخص باشد که "هردو کلون اشتراک دارند یاخیر؟" گراف های بازه ای ابزار مفیدی برای مدل کردن مساله بازسازی هستند. نمایش بازه ای گراف G ترتیب قرار گرفتن کلون ها و اشتراکات بین آن ها را نشان می دهد. درایجاد نقشه توالی های هم پوشان کاسمید، مجموعه اشتراکات کامل را در اخیار نداریم. لذا مدل گراف بازه ای بیشتر از این قابل کاربرد نیست. پس یک رده جدید از گراف ها به نام گراف های بازه ای کاوشگر معرفی می شوند که تعمیمی از گراف های بازه ای هستند. گراف های بازه ای کاوشگر برای مدل کردن مساله بازسازی DNA فقط به بخشی از اشتراکات نیاز دارند.یک گراف، بازه ای کاوشگر نامیده می شود اگر مجموعه راس های آن را بتوان به دو زیر مجموعه P وN افراز نمود و یک بازه به هر راس نسبت داد، دوراس مجاور هستند اگر و تنها اگر بازه های متناظر آن ها اشتراک غیرتهی داشته باشند و حداقل یکی از این دو راس در P باشند. به وضوح درایجاد نقشه توالی های هم پوشان کاسمید، کلون هایی به عنوان کاوشگر مورد استفاده قرار می گیرند متناظر با راس های مجموعه P و کلون های غیر کاوشگر متناظر با راسهای مجموعه N هستند. درمقایسه با گراف های بازه ای ، گراف های بازه ای کاوشگر ابزار قویتر و قابل انعطاف تری برای کنارهم قرار دادن کلون های هم پوشان در ایجاد نقشه فیزیکی DNA هستند. هرتعداد از کاوشگرها برای ایجاد یک گراف بازه ای کاوشگر می تواند مورد استفاده قرار بگیرد. اما به منظور ایجاد یک گراف بازه ای هر عضو در کتابخانه کلون ها باید به عنوان یک کاوشگر مورد استفاده قرار گیرد. بعد از این که بوسیله دورگه سازی مجموعه ای از اشتراکات پیدا شدند یک گراف بازه ای کاوشگر با توجه به این مجموعه از اشتراکات می تواند ایجاد شود. نمایش بازه ای این گراف برای ایجاد نقشه متناظر مورد استفاده قرار می گیرد .اما در مدل سازی با استفاده از گراف های بازه ای ایجاد نقشه تا زمانی که مجموعه اشتراکات کامل مشخص شوند به تاخیر می افتد.

افرادمشهور

لئونارد اویلر

Leonhard Euler

(۱۵ آوریل ۱۷۰۷ - ۱۸ سپتامبر ۱۷۸۳) از ریاضیدانان و فیزیکدانان برجسته سوئیسی بود. او کشف‌های بسیار مهمی در زمینه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریه گراف داشته‌است. اویلر همچنین اصلاحات مهمی در زمینه‌های تجزیه و تحلیل ریاضی مانند مفهوم تابع ریاضی انجام داده‌است و برای کارهای خود در مکانیک، دینامیک سیالات، اپتیک و نجوم شهرت دارد. اویلر بیشتر سال‌های زندگی خود را در شهر سن پترزبورگ در روسیه و شهر برلین در پادشاهی پروس به سر برد. او یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان سده ۱۸ و یکی از بزرگترین دانشمندان تمام دوران شناخته شده‌است.

کودکی و نوجوانی

لئونارد اویلر در ۱۵ آوریل ۱۷۰۷ در شهر بازل در کشور سوییس متولد شد. پدرش از کشیشان پیروکالون بود و میل داشت پسرش جانشین او شود، ولی اویلر بر خلاف میل او در دانشگاه بازل به مطالعه علوم الهیات پرداخت. پدر اویلر دروس مقدماتیِ از جمله ریاضیات را به او آموزش داد. اویلر بعداً چند سالی را در بازل به سر برد و در یک دبیرستان (گومنازیوم) معمولی محلی به تحصیل پرداخت. در آن دبیرستان درس ریاضیات اصلاً تدریس نمی‌شد و در نتیجه اویلر این دانش را به طور خصوصی نزد ریاضیدانی به نام یوهان بورکهارت آموخت.

در سال ۱۷۲۰ اویلر که هنوز ۱۴ سال بیشتر نداشت، وارد دانشکده ادب و هنر دانشگاه بازل شد تا پیش از کسب تخصص، دانش عمومی خود را تکمیل کند. از جمله استادان او یوهان یکم برنوس بود که در کرسی ریاضیات جانشین برادرش یاکوب شده بود. اویلر در سال ۱۷۲۲ معادل درجه کارشناسی را در ادبیات، و در ۱۷۲۳ مدرک کارشناسی ارشد را در رشته فلسفه دریافت کرد.

جوانی

اویلر در ۱۸ سالگی پژوهش‌های مستقلی را آغاز کرد. نخستین کار او که در سال ۱۷۲۶ در یک نشریه علمی منتشر شد، مقاله کوتاهی درباره رسم منحنی‌های هم‌زمان بود. سپس در سال ۱۷۲۷ در همان نشریه مقاله‌ای درباره مسیرهای متقابل جبری انتشار داد. برای نخستین بار اویلر در ۱۹ سالگی شهرت علمی کسب کرد؛ در این سن بود که فرهنگستان پاریس حل مشکلی را درباره ساختمان دکل کشتی به مسابقه گذاشته بود، و مقاله اویلر در این مورد مقام دوم را احراز نمود.

در پائیز ۱۷۲۶ از اویلر دعوت شد که به عنوان دستیار فیزیولوژی در شهر سن پترزبورگ در روسیه بکار مشغول شود. در ۱۷۲۷ از بازل به سن پترزبورگ رفت در آنجا بی‌درنگ این بخت مساعد را یافت که در رشته واقعی خود کار کند و به‌عنوان عضو وابسته فرهنگستان دربخش ریاضیات منصوب شد. در ۱۷۳۱ به استادی فیزیک رسید و در ۱۷۳۳ که دانیل برنولی به عنوان استاد ریاضیات به بازل برگشت، اویلر جانشین وی شد. او از ۱۷۲۷ گزارش‌هایی در باره پژوهش‌هایش به جلسات فرهنگستان می‌فرستاد او آنها را در سال ۱۷۲۹ در جلد دوم صورت جلسات فرهنگستان (گزارش‌های فرهنگستان اپراتوری علوم پتروگراد) انتشار داد.

اویلر طی ۱۴ سالی که در سن پترزبورگ بود به کشف‌های درخشانی در زمینه‌هایی چون تحلیل ریاضی، نظریه اعداد و مکانیک دست یافت. تا سال ۱۷۴۱ بین ۸۰ تا ۹۰ اثر برای انتشار آماده کرده‌بود که ۵۵ تای آن‌ها از جمله دو جلد «مکانیک» را منتشر ساخت.

اویلر در آن زمان عضو فرهنگستان‌های شهرهای سن پترزبورگ در روسیه و برلین در آلمان بود. سپس در سال ۱۷۴۹به عضویت انجمن پادشاهی لندن، در سال ۱۷۵۳ به عضویت انجمن فیزیک و ریاضیات بازل، و در سال ۱۷۵۵ به عضویت فرهنگستان علوم پاریس نیز انتخاب گردید.

اویلر در ۱۷۴۱ پس از ۱۴ سال اقامت در روسیه به شهر برلین در آلمان رفت و ۲۵ سال بعد را در آنجا سپری کرد. در عین حال، هنوز عضو فعال هر دو فرهنگستان برلین و سن‌پترزبورگ بود. وی در تبدیل انجمن علوم سابق به یک فرهنگستان بزرگ که در سال ۱۷۴۴ رسماً با نام فرانسوی فرهنگستان پادشاهی علوم و ادبیات برلین بنیاد نهاده شد، فعالیت فراوان داشت. طی این دوره اویلر به تنوع پژوهش‌های خود بسیار افزود در رقابت با دالامبر و دانیل برنولی دانش فیزیک ریاضی را پی‌ریزی کرد، و در پیشبرد نظریه حرکت ماه و سیارات از رقیبان کلرو و دالامبر بود. در همان زمان نظریه حرکت جامدات امکان ساخت ابزار ریاضی هیدرودینامیک را فراهم آورد. وی هندسه دیفرانسیل سطوح را ابداع کرد و به شدت درباره نورشناسی برق و مغناطیس به پژوهش پرداخت. همچنین درباره مسائل فناوری نظیر ساختن دوربین‌های شکستنی بی‌رنگ، تکمیل توربین آبی زگنر و نظریه چرخ‌دنده‌ها به تفکر پرداخت.

شمار آثار اویلر در دوره اقامت در برلین از ۳۸۰ کمتر نبود که از میان ۲۷۵ اثر انتشار یافتند که از جمله آنها می‌توان به تعدادی کتاب مفصل تک‌نگاشتی در باره حساب جامع و فاضل تغییرات، کتابی بنیادین درباره محاسبه مدار

اجرام آسمانی، کتابی درباره توپخانه و پرتاب گلوله، کتاب مقدماتی به تحلیل نامتناهی، رساله‌ای در کشتی‌سازی و دریانوردی که صورت آغازین آن در سن‌پترزبورگ تهیه شده‌بود، اشاره کرد.
نخستین نظریه او درباره حرکت ماه و اصول حساب دیفرانسیل در سه کتاب آخر او به هزینه فرهنگستان سن پترزبورگ انتشار یافتند. در آخر رساله‌ای بود در باره مکانیک جامدات به نام «نظریه حرکت اجسام جامد» (۱۷۵۶). رساله مشهور «نامه‌هایی به یک شاهزاده خانم آلمانی در باره موضوع‌های مختلف فیزیک و فلسفه» که در واقع درس‌هایی بود که اویلر به یکی از بستگان پادشاه پروس داده بود، تا پیش از بازگشت اویلر به سن‌پترزبورگ انتشار نیافتند. این کتاب موفقیتی بی‌نظیر یافت و ۱۲ بار به زبان اصلی تجدید چاپ گردید و به بسیاری زبان‌های دیگر نیز ترجمه شد.
نظریات
اویلر همچنان به مطالعات ریاضی خود ادامه می‌داد و رفقایش او را روح آنالیز ریاضی می‌دانستند. آراگو درباره اویلر چنین گفته‌است: اویلر با همان سهولتی که انسان نفس می‌کشد محاسبات ریاضی را انجام می‌دهد.
اویلر به معنای گسترده‌ای که در سده هجدهم برای کلمه هندسه کار می‌رفت هندسه‌دان بود. در کار او ریاضیات بستگی نزدیکی با کاربرد سایر علوم با مسائل فناوری و با زندگی عمومی داشت. در آثار ریاضی اویلر تحلیل ریاضی جایگاه نخست را دارد؛ ۱۷جلد از مجموعه آثار او در این زمینه‌است. او با کشفیات متعدد به تحلیل ریاضی یاری داد. نحوه عرضه آن در کتابهای درسی خود را منظم ساخت در بنیادگذاری رشته‌های متعدد ریاضی نظیر حساب جامع و فاضل تغییرات، نظریه معادلات دیفرانسیل، نظریه مقدماتی توابع متغیرهای مختلط و نظریه توابع خاص بی‌اندزه کمک کرد. وی بسیاری از قراردادهای کنونی علائم ریاضی را وارد میدان کرد.

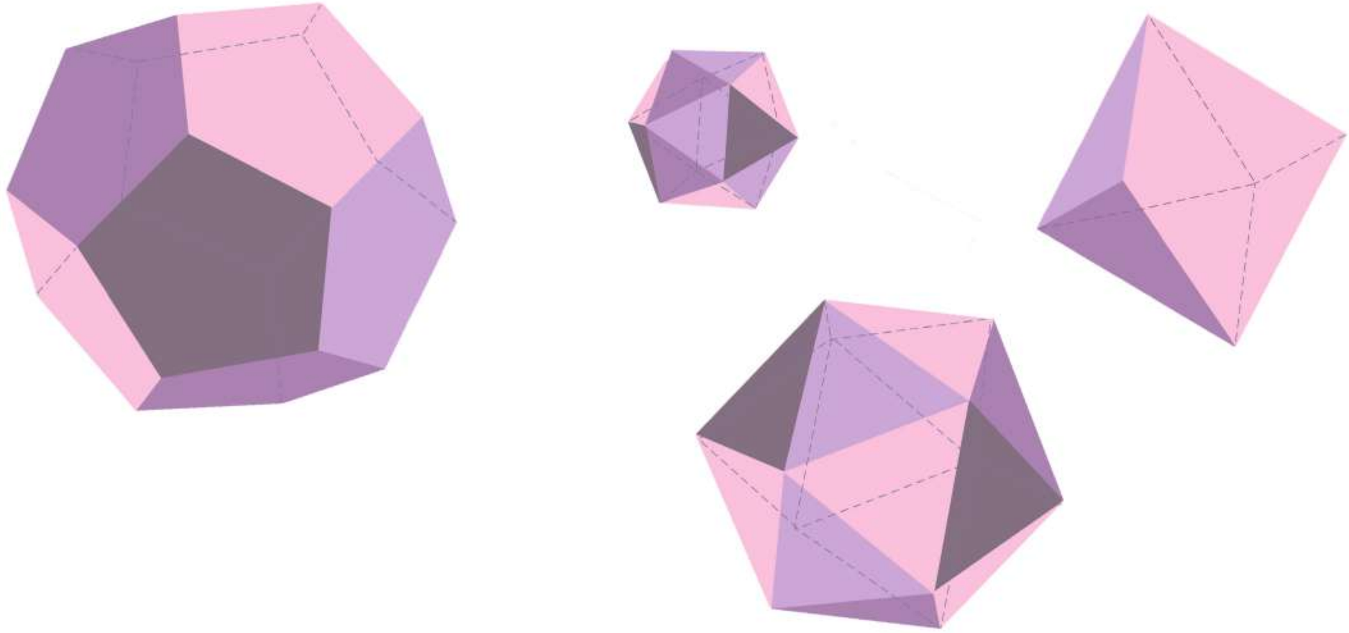
کتابها و مقالات
کشف‌هایی که در نیمه سده هجدهم در زمینه تحلیل ریاضی انجام گرفته‌بود به شیوه‌ای منظم به‌وسیله اویلر در مجموعه سه کتاب زیر خلاصه شده‌است:
مدخلی بر تحلیل نامتناهی (۱۷۴۸)
روش‌های حساب دیفرانسیل(۱۷۵۵)
روش‌های حساب انتگرال(۱۷۶۸-۱۷۷۰)

او هر روز اکتشافی به اکتشافات خود می‌افزود و تعدا آنها آنقدر زیاد است که حتی امروزه موفق به چاپ کامل آثار او نگردیده‌اند.
وی سه روز را به حل مسئله‌ای که از طرف آکادمی مطرح شده‌بود گذراند و پس از آن به بستر بیماری افتاد. در این بیماری یک چشم خود را از دست داد در سن ۶۰ سالگی بینایی چشم دیگرش هم از دست رفت. گرچه چشم او را با موفقیت عمل کردند ولی زخم آن دچار عفونت شد و برای همیشه چشمان خود را از دست داد. اویلر در ۱۸ سپتامبر ۱۷۸۳ هنگامی که مشغول محاسبه مسیر سیاره اورانوس بود ناگهان با گفتن کلمه «من مُردم» زندگی را بدرود گفت.

دکتر مهدی بهزاد Mehdi Behzad

ریاضیدان مشهور ایرانی و یکی از پیشگامان در نظریه گراف است. او مؤلف دو کتاب در این زمینه منتشره ۱۹۷۲ و ۱۹۷۸ است که سال‌ها مرجع اصلی این زمینه بودند. عدد اردوش او ۱ است. او در بسیاری از دانشگاه‌ها از جمله شهید بهشتی، میشیگان، صنعتی شریف، و ایالتی میشیگان و ام آی تی تدریس کرده‌است. او از مؤسسین انجمن ریاضی ایران و اولین دبیرکل فرهنگستان علوم ایران است. او اکنون عضو پیوسته فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران است. دکتر مهدی بهزاد واضع عدد رنگی کلی (انگاره بهزاد) است که ۶۰ سال است که به قوت خود باقی است و رد نشده‌است. او اولین استاد تمام دانشگاه صنعتی شریف است. دکتر بهزاد از چهره‌های ماندگار کشور و همچنین برگزیده جایزه علامه طباطبایی بنیاد ملی نخبگان در سال ۱۳۹۰ است.
جیمز جوزف سیلوستر James Joseph Sylvestez وی در ۳ سپتامبر ۱۸۱۴ در لندن به دنیا آمد. در سال ۱۸۳۱ وارد کالج سنت جیمز کمبریج شد. از سال ۱۸۳۸ تا ۱۸۴۰ به عنوان استاد فلسفه طبیعی (فیزیک) در دانشگاه لندن به خدمت پرداخت و سپس در سال ۱۸۴۱، سمت استادی ریاضیات در دانشگاه ویرجینیا در آمریکا را پذیرفت و این پست را چند ماه بعد به دلیل آنکه وارد نزاعی با دو تن از دانشجویانش شد، ترک گفت. وی پس از بازگشت به انگلستان، در سال ۱۸۴۶ همکاری خود را با آرتور کیلی شروع کرد.

از سال ۱۸۵۵ تا ۱۸۷۰، سیلوستر استاد ریاضیات آکادمی سلطنتی نظامی در وولویچ شد. در سال ۱۸۷۶ وی به عنوان استاد ریاضیات در دانشگاه جانز هاپکینز در شهر بالتیمور به آمریکا بازگشت



و هفت سال خوش و بسیار پرثمر را در آنجا به سر برد و در سال ۱۸۷۸ مؤسس و سردبیر «مجله آمریکایی ریاضی» شد. هنگام خدمت در دانشگاه جان هاپکینز، کیلی را برای ایراد سلسله دروسی دربارهٔ توابع آبلی به دانشگاه دعوت کرد، و خود او هم در کلاس‌های درس وی حضور یافت. در سال ۱۸۸۴ کرسی ساویلی هندسه را در دانشگاه آکسفورد پذیرفت. وی سرانجام در ۱۵ مارس ۱۸۹۷، در سن ۸۳ سالگی در لندن درگذشت.

مقالات

اولین مقاله‌های ریاضی سیلوستر در نظریه نوری فرنل و قضیه استورم بود . سپس به تشویق کیلی به نوشتن مقالات مهمی در جبر جدید پرداخت. وی مقالاتی در نظریه حذف، نظریه تبدیل، صورتهای کانونی، دترمینان‌ها، حساب صورت‌ها، نظریه افراز، نظریه پایاها، روش چبیشف در خصوص تعداد اعداد اول در حدود معین، مقادیر ویژه ماتریس‌ها، نظریه معادلات، جبر چندگانی‌ها ، نظریه اعداد، ماشین‌های مفصلی، نظریه احتمالات و عکس سازه‌ها نوشت.

وی سهم زیادی در واژه‌شناسی ریاضی داشت و آنقدر واژه ریاضی نو ساخت که او را «حضرت آدم ریاضیات» نامیده‌اند.

شاید شما بتوانید حل کنید:

علم به طور کلی با سوال و پرسش آغاز می‌شود.
در سال ۱۹۰۰ هیلبرت ۲۴ مسئله ریاضی را مطرح کرد که تا آن زمان هیچ یک از آن‌ها حل نشده بودند و به نوعی در رده بندی کلی، مسائل اساسی و اصلی حل نشده ریاضیات نام گرفت. از آن زمان تا کنون برخی از آن‌ها به طور کامل و برخی به طور جزئی حل شده‌اند و برخی هنوز بازند.
اما امروزه به علت وسعت چند صد برابری ریاضیات، دیگر کسی قادر نیست چنین فهرستی از مسائل حل نشده را حتی در یک شاخه خاص مطرح کند و این خود دلیل بر پویایی و زنده بودن ریاضیات است که تمام شدنی نیست.
در مورد هندسه در ساده‌ترین سطح آن یعنی هندسه مسطحه اقلیدسی چند کتاب تحت عنوان مسائل حل نشده هندسه مسطحه وجود دارند.
در سطوح بالاتر، هندسه‌های متنوعی وجود دارند که هر کدام به فراخور خود تعداد زیادی مسئله باز دارند.
مثلا هندسه هذلولوی سه بعدی یکی از مرموزترین بخش‌های هندسه و ریاضیات است.
مسئله ژئودزیک (یافتن خمی بین دو نقطه با کمترین طول) یکی از مسائلی است که در بسیاری از هندسه‌ها مطرح است و هنوز حل نشده است.
و دیگر این که برای یک خم خاص، چه اجسامی در هندسه مورد نظر می‌توان یافت، که این خم ژئودزیک آن جسم در آن هندسه باشد.
باید توجه داشت که تعداد مسائل حل نشده در هر علم، خاصه ریاضیات و مخصوص هندسه بسیار بیشتر از مسائل حل شده آن است.

خیام و هندسه های ناقلیدسی

پدید آورنده: جعفر آقایانی چاووشی
پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات
عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

هندسه‌های ناقلیدسی گرچه در قرن نوزدهم میلادی به وسیله لباچفسکی و ریمان کشف شدند، اما این دو ریاضیدان و ریاضیدانان دیگری که به نحوی در این کشف سهیم بودند مستقیم یا غیرمستقیم با نظریات ساکری ریاضیدان و منطقدان ایتالیایی قرن هجدهم میلادی که پیش از آن‌ها، ناخودآگاه چند قضیه هندسه ناقلیدسی را کشف کرده بود آشنا بوده و از آن‌ها قطعا در کشفیات خود الهام گرفته‌اند. تحقیقات اخیر نشان می‌دهد که ساکری نیز به نوبه خود در ارائه این نظریات از حکیم عمرخیام ریاضیدان و فیلسوف بزرگ ایرانی متاثر بوده است.

در این مقاله پس از بررسی رساله خیام درباره اصل موضوع پنجم اقلیدس، ارتباط آن با هندسه‌های ناقلیدسی مورد تحقیق قرار گرفته شده و تاثیرآن روی ساکری نشان داده شده است.

در این جا چکیده‌ای از مقاله خیام و هندسه‌های ناقلیدسی نوشته جعفر آقایانی چاووشی آورده شده است. کل مطالب مقاله را می‌توانید در لینک زیر با عنوان هندسه ناقلیدسی مطالعه کنید.

/https://ricest.ac.ir

اصل پنجم اقلیدس: هرگاه دو خط به وسیله خط قاطعی چنان قطع شوند که مجموع اندازه دو زاویه درونی واقع دریک طرف خط قاطع کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف خط قاطع تلاقی می کنند.

همین اصل موضوع پنجم بود که توجه هندسه‌دانان را در طول قرون و اعصار به خود جلب کرد. چرا که نه چندان ساده بود تا اصل بودنش را بتوان بدون دغدغه پذیرفت و نه هم اثبات می‌شد.

بطلمیوس ریاضیدان و منجم یونانی قرن دوم میلادی برای اثبات این اصل تلاش‌های بی‌نتیجه‌ای کرده است و پروکلوس فیلسوف و ریاضیدان یونانی قرن چهارم میلادی آن را یک قضیه هندسی نامید که باید اثبات شود.

تلاش‌های مهمی در عالم اسلام نیز توسط نیریزی، جوهری، ثابت بن قره و مخصوصا ابن هیثم صورت گرفت.

اصل موضوع پنجم به عنوان اصل اثبات ناپذیر ذهن خیام را نیز ارضا و اقناع نمی‌کرده است، از همین رو او نیز مثل چند ریاضیدان پیش از خود برای اثبات این اصل همت می‌گمارد.

خیام در مقدمه کلی برای رساله‌اش مطالبی پیرامون اهمیت ریاضیات اظهار می‌کند که بی‌شباهت به آنچه پاسکال از آن به ((روح هندسی)) تعبیر کرده است نیست. او پس از ذکر نکات مقدماتی به سراغ اثبات اصل توازی اقلیدس می‌رود.

خیام در آن واحد به صورت یک ریاضیدان و یک فیلسوف بزرگ جلوه می‌کند و می‌کوشد تا وابستگی تنگاتنگی که بین ریاضیات و فلسفه موجود است را به روشنی بنمایاند تا بدین گونه عدم موفقیت ریاضیدانان پیشین را در اثبات اصل موضوع توازی توجیه نماید.

ارتباطی که خیام بین ریاضیات و اندیشه‌های فلسفی ارسطو عموما و منطق او خصوصا برقرار کرده است، اگر در تاریخ تمدن اسلامی بی‌نظیر نباشد، لااقل کم نظیر است.

خیام در شروع کار خود، یک" شبه برهان " برای اصل توازی می‌دهد که آن را " برهان فلسفی " می‌نامد، بلافاصله به سراغ اثباتی کاملا هندسی می‌رود و پس از ارائه سه گزاره هندسی مجددا به مقولات فلسفی خود باز می‌گردد. از این رو نمی‌توان برای مباحث خیام، نقشه‌ای دقیق فراهم کرد. خطوط اساسی این مباحث در دو بخش بررسی می‌شود:

۱.فلسفه ریاضی خیام
۲.غفلت متقدمین و خطای متاخرین

روش خیام برای اثبات اصل موضوعه پنجم: چهارضلعی متساوی‌الساقین دو قائمه را در نظر می‌گیرد که دو زاویه پایینی آن قائمه باشند و حالا برای دو زاویه بالایی آن سه فرض حاده ، قائمه و یا منفرجه بودن را در نظر می‌گیرد. برای اثبات قائمه بودن، از برهان خلف استفاده می‌کند یعنی نقیض قائمه بودن (فرض حاده و منفرجه بودن) را در نظر می‌گیرد و در پایان به تناقض می‌رسد اثبات می‌کند که دو زاویه باید قائمه باشند اما خیام در روند اثبات خود از هم‌ارز اصل موضوعه اقلیدس استفاده کرده بود که اگر این کار را نمی‌کرد هرگز به تناقض نمی‌رسید و شاید رازی که قرن‌ها پس از او به وسیله لوباچفسکی و ریمان گشوده شد در همان زمان گشوده می‌شد.

تاثیر خیام بر ساکری:

پس از خیام ریاضیدانان دیگر اسـ ـات اصل پنجم اقلیدس تلاش کردند از جمله خواجه نصیرالدین طوسی ریاضیدان و فیلسوف برجسته ایرانی در قرن هفتم هجری می‌باشد. اما در اروپا هم مهم‌ترین کوشش‌ها توسط کشیشی به نام ساکری صورت گرفت. ساکری برای اثبات این اصل موضوعه همان چهارضلعی متساوی الساقین دو قائمه خیام را مورد مطالعه قرار

می‌دهد. ساکری توانست با زاویه منفرجه به تناقض برسد اما فرض زاویه حاده دشوارتر از آن بود که انتظار داشت و هر قدر تلاش کرد نتوانست تناقضی را که در پی آن بود حاصل نماید. برعکس به نتایجی عجیب رسید که بسیاری از آن‌ها قضایای لوباچفسکی را تشکیل می‌دهند.

ناچارا از روی عجز نوشت که ((فرض زاویه حاده اصلا درست نیست.))

بدین ترتیب بدون اینکه خود متوجه شود هندسه نااقلیدسی را کشف کرده‌بود.

باید به این نکته اشاره کرد که شباهت زیاد گزاره های ساکری به خیام، محققین تاریخ ریاضیات را متقاعد کرده است که او ازکارهای خیام در این باره بهره برده‌است.

برای مطالعه دقیق‌تر گزاره‌های خیام و ساکری و مقایسه آن‌ها میتوانید به مقاله اصلی و لینک ذکر شده مراجعه کنید.

مطالعه و بررسی هندسه فراکتال و امکان استفاده آن در هنر محیطی

مژده توافقی جهرمی، حمید حمیدی

-دانشجوی کارشناسی ارشد ارتباط تصویری، موسسه آموزش عالی هنر شیراز

-هیئت علمی موسسه آموزش عالی هنر شیراز

امروزه هنر محیطی یکی از شاخه‌های هنر جدید به شمار می‌رود و تقریبا در همه جای دنیا مطرح و پذیرای مخاطبان گشته است. هنر محیطی هنری است با گرایش‌های مختلف که سعی دارد، با نگرشی نو به رابطه انسان با طبیعت بپردازد و راهکارهایی جدید برای هم زیستن با محیط اطراف در اختیارمان بگذارد. از طرفی هندسه فراکتالی امکانی است در اختیار هنرمند؛ جهت آفرینش طرح‌های متفاوت که با استفاده از آن از دیرباز در برخی از هنرها مشاهده می‌شود. دراین مقاله سعی شده که ضمن پرداختن به سیر تاریخی و هنر محیطی به هندسه فراکتال نیز اشاره و امکان استفاده از هندسه فراکتال در هنر محیطی موردبررسی قرار گیرد. روش گردآوری اطلاعات در این تحقیق از طریق کتابخانه‌ای و اسنادی توسط نگارنده می‌باشد. جامعه آماری مورد تحقیق و پژوهش شامل آثار هنرمندانی است که به نوعی در طبیعت در یکی از شاخه‌های مذکور به خلق اثر هنری خود پرداخته و از فراکتال در خلق هنر محیطی بهره جسته اند. روش تحقیق توصیفی و تجزیه وتحلیل اطلاعات به روش تحقیقی و مقایسه‌ای در متن خواهد آمد. آنچه درنهایت از این تحقیق حاصل گردید بیان کننده این موضوع است که آثار هنرمندان در چهارچوب هنر محیطی بیشتر ناظر بر کارکردهای زیست محیطی بوده که البته در بین آن‌ها از هندسه فراکتال نیز استفاده شده است.

زمینه های یک ذره باردار در حرکت هذلولی

جوئل فرانکلین و دیوید ج. گریفیتس) گروه فیزیک ، کالج رید ، پورتلند ، اورگان ۹۷۲۰۲(

(دریافت شده در ۱۳ فوریه ۲۰۱۴ ؛ پذیرفته شده در ۲۴ آوریل ۲۰۱۴)

موضوع کلی:

ذره در حرکت هذلولی، میدان‌های الکتریکی تولید می‌کند که به نظر می‌رسد در هوا خاتمه یافته و قانون گاوس را نقض می‌کند. راه حل این پارادوکس شصت سال است که شناخته شده است اما دقیقاً اینکه چرا روش ساده لوحانه شکست می‌خورد چندان روشن نیست.(انجمن معلمان فیزیک آمریکا)

خلاصه مقاله

$z(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}$

در نسبیت خـ $b \equiv mc^2/F$ جرم m تحت نیروی ثابت F تحت "حرکت هذلولی" قرار می‌گیرد:

جایی که ذره از بی‌نهایت در امتداد (مثلاً) محور z حرکت می‌کند، درb $t \to \pm\infty$ ـرار می‌گیرد و به بی‌نهایت باز می‌گردد. سرعت آن به c ± نزدیک می‌شود زمانی که در مماس قرار دارد.

از آنجا که اطلاعات نمی‌توانند سریع‌تر از سرعت نور حرکت کنند، منطقه زیر قطر اصلی (z=−ct)از وجود ذره غافل است. ذره "فراتر از افق" است. برای کسی که در مبدا است ابتدا در t=۰ به چشم می‌خورد. اگر ذره دارای بار الکتریکی باشد، میدان‌های آن لزوماً برای همه z<۰، در زمان t=۰صفر است. اما میدان الکتریکی برای z>۰صفر نیست و همانطور که خواهیم دید خطوط میدان در وسط هوا در صفحه xy به پایان می‌رسند. این قانون گاوس را نقض می‌کند که نمی‌تواند واقعیت داشته باشد. وظیفه ما یافتن خطا و رفع آن است. در قسمت II ، ما میدان الکتریکی یک بار q را در حرکت هذلولی، در زمان t=۰محاسبه می‌کنیم. نمودار خطوط میدان نشان می‌دهد که آن‌ها در صفحه xy به طور پیوسته به صفر نمی‌رسند. در قسمت III، ما مورد حرکت "کوتاه" هذلولی را بررسی می‌کنیم(حرکت هذلولی به زمان t=−t_۰ ، به سرعت ثابت در زمان‌های قبلی متصل است.) در این حالت، خطوط میدانی با نزدیک شدن به صفحه xy یک چرخش شدید انجام می‌دهند و هیچ نقض قانون گاوس وجود ندارد. در قسمتIV ، ما پتانسیل‌های شارژ در حرکت هذلولی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و یکبار دیگر متوجه می‌شویم که باید "با دست" به یک اصطلاح الهام گرفته از مورد کوتاه شده بپیوندیم. در قسمت V ، ما می‌پرسیم که چگونه محاسبات ساده لوحانه اصطلاح اضافی را از دست داده و با حل معما پایان می‌یابد. ضمائم A و B برخی از جزئیات جبری را ارائه می‌دهند ، و ضمیمه C تابش ناشی از بار را در حرکت هذلولی بررسی می‌کند. به طرز شگفت انگیزی، شرایط "اضافی" کمک نمی‌کند.

ما در این قسمت خلاصه‌ای از مقاله را آوردهایم برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مقاله‌ی اصلی رجوع کنید.

نیکلای لوباچفسکی

نیکولای ایوانوویچ لباچفسکی دوم نوامبر سال ۱۷۹۳ چشم به جهان گشود. پدرش از قشر کم درآمد روسیه بود. در اوایل زندگی مراقبت نیکولای و دو برادرش بر عهده مادرشان، قرار گرفت و او با همه امکانات کم آنان را به دبیرستان غازان فرستاد. نیکولای جوان پس از طی دوره دبیرستان از سال ۱۸۰۷ در دانشگاه غازان تحصیل خود را آغاز کرد. لباچفسکی جوان، از همان دوران دبیرستان تحت تاثیر درس‌های کارتاشوسکی (ریاضی‌دان و مربی عالی‌قدر) به ریاضیات دل بسته بود. وقتی لباچفسکی وارد دانشگاه شد، به میل مادرش پزشکی را شروع کرد، ولی در ژانویه سال ۱۸۰۸ استاد بارتل و در سپتامبر همان سال استاد رنر، وارد دانشگاه شدند. اولی، ریاضی‌دان بزرگ و مربی با ارزشی بود که آوازه شهرتش از مدت‌ها پیش در دانشگاه غازان پیچیده بود. از او استقبالی سرشار از احترام و محبت به عمل آمد. لباچفسکی، پزشکی را رها کرده و در کلاس درس این استاد حاضر شد. رابطه گرمی بین استاد و دانشجو برقرار شد و بارتل بطور خصوصی با لباچفسکی کار کرد.

لوباچفسکی، هر چند درباره‌ی موضوعات متنوعی از قبیل مکانیک، اخترشناسی، نظریه-احتمالات، تحلیل ریاضی (آنالیز)، و جبر پژوهش کرد و مقاله و کتاب نوشت اما نام او را فعالیت در زمینهٔ هندسه و ابداع هندسه ی نااقلیدسی در تاریخ ماندگار کرد. امروزه اغلب هندسه ی هذلولوی را به نام او هندسه لوباچفسکی می‌نامند. لباچفسکی از جمله اولین کسانی بود که قواعد هندسه اقلیدسی را که بیش از ۲۰۰۰ سال بر علوم مختلف ریاضی و فیزیک حاکم بود درهم شکست. کسی باورش نمی شد هنگامی که اروپا مرکز علم بود شخصی در گوشه ای از روسیه بتواند پایه های هندسه اقلیدسی را به لرزه در بیاورد و پایه های علم در قرن نوزدهم را پی‌ریزی کند.

لباچفسکی طرفدار طرز تفکر مترقی بود. او از درک علمی هندسه دفاع می‌کرد و کوشش‌هایی را که در جهت انتساب قوانین هندسه به عقل مطلق انجام می‌گرفت محکوم می‌کرد.

او می‌گفت: " ما در طبیعت تنها حرکت را می‌شناسیم، حرکتی که بدون آن هیچ احساسی ممکن نیست. بدین جهت همه مفاهیم دیگر و مثلا مفاهیم هندسه به وسیله مغز ما و از خواص حرکت گرفته شده است."

به همین جهت لباچفسکی با سرسختی و پیگیری این فکر را دنبال می‌کرد که: "مقدماتی از ریاضی که کوشش می‌شود از خود فکر و بدون ارتباط با عمل بدست آید برای ریاضیات بی‌فایده خواهد بود ."

لباچفسکی با متزلزل ساختن خلل ناپذیری اصول هندسه اقلیدسی ضربه سنگینی هم به فلسفه کانت وارد کرد. کانت معتقد بود که بررسی حقایق هندسی نتیجه تجربه انسان نیست، بلکه اشکال ذاتی و غیر قابل تغییر شناخت انسانی هستند و برای این نظریه خود از خلل ناپذیری اصول هندسه اقلیدس به عنوان نقطه اتکای اساسی استفاده می‌کرد .اما برعکس برای لباچفسکی تجربه و عمل همواره راهنمای کشف حقایق بود. مثلا او برای اینکه امکان وجود هندسه‌ای را که به وسیله خود او کشف شده بود با تحقیق تجربی تایید کند، اقدام به اندازه‌گیری زاویه‌های مثلثی نمود که راسهای آن ستارگان آسمان بودند .این طرز تفکر که تنها تجربه و عمل می‌توان اطمینان به درستی نتیجه‌گیری‌های تئوریک را بوجود آورد از مشخصات جهان بینی لباچفسکی بود که برای او راهنمایی در جهت تحکیم رابطه علم و عمل بود.

او اولین کسی بود که عملاً مقاله‌ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت او در ۱۲۰۸ ه. ش ۱۸۲۹ م. مقالهٔ خود را به روسی نوشت و در آغاز هندسه‌اش را هندسه موهومی و هندسه عام نام گذاشت. اما به دلیل دور بودن روسیه از کانون‌های

علمی در آن زمان کار او چندان مورد توجه واقع نشد و همچنین در اروپا نیز به دلیل زبان روسی آن مورد توجه قرار نگرفت. منتقدان اثر او را رد کردند و یک مجله ادبی روسی لباچسفکی را به دلیل گستاخی و بی‌شرمی اختراع دروغ جدیدش سخت مورد حمله قرار داد. با این وجود او جسورانه به انتشار مقالات دیگرش ادامه داد.

لوباچفسکی علناً با تعلیمات و عقاید کانت در بارهٔ فضا به مثابهٔ شهود ذهنی به مبارزه پرداخت. بر اساس فلسفه کانت ذهن انسان تنها قادر به درک یک فضا و یک نوع هندسه است و آن هندسه اقلیدسی و محال است که هندسه‌های دیگری را بتوان تصور کرد. لباچفسکی در ۱۸۳۵ نوشت: «تلاش‌های بی‌ثمری که از زمان اقلیدس تا کنون صورت گرفته‌است... این بدگمانی را در من برانگیخت که حقیقت... در داده‌ها وجود ندارد و برای اثبات آن، مثل مورد قوانین دیگر طبیعت، کمک‌های تجربی، مثلاً مشاهدات نجومی مورد نیاز است.» (هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی) کشف هندسه نااقلیدسی اثری شگرف بر تفکر انسان داشت و همانند کشف نجوم کوپرنیکی انقلابی در دانش‌ها ایجاد کرد.

اریک تمپل بل لباچفسکی را آزادکننده‌ی بزرگ نامیده است. بل می‌گوید نام او برای هر بچه مدرسه‌ای به اندازه میکل آنژ و ناپلئون باید آشنا باشد. متاسفانه لباچفسکی در دوران حیات مورد تجلیل قرار نگرفت و در حقیقت در ۱۸۴۶ علی رقم بیست سال خدمت برجسته‌ای که در مقام استاد و رئیس انجام داده بود از دانشگاه غازان اخراج شد. او دو سال پیش از مرگش مجبور شد به علت نابینایی آخرین کتابش را تقریر کند تا برایش بنویسند.

مصاحبه

استادلاله

گفتگـو بـا دکتـر ابوالقاسـم لالـه عضـو هیـات علمـی دانشـگاه الزهـرا

۱. چرا گرایش هندسه را انتخاب کردید؟

موضوع انتخاب گرایـش هندسـه برای اینجانب بـه چنـد عامـل بسـتگی داشـت. در دوران دبیرسـتان، بـه طـور کلـی بـه ریاضیـات علاقه‌منـد شـدم و رشـته ریاضـی را انخاب کـردم. کتاب‌هـای مرحـوم شـهریاری، مجلـه وانتشـارات یـکان در ایـن انتخـاب بسـیار موثر بودنـد. عامـل دیگـر داشـتن حافظـه تصویـری بـود. عامـل سـوم کـه بسـیار جهـت دهنـده و تعییـن کننـده بـود، وجـود اسـتادی در دوران کارشناسـی بـود کـه جامعیـت علمـی وشـیوه علمـی وکنـش اخلاقـی ممتازوممتـازی داشـتند. درس‌هایـی کـه ایشـان ارائـه می‌دادنـد، جدیـد و بـه‌روز بودنـد و عمومـا دیدگاهـی هندسـی داشـتند. در دوران کارشناسـی ارشـد و دکتـری نیـز بـا اسـاتید برجسـته‌ای آشـنا شـدم کـه مسـیر را برایـم بـا معنی‌تـر و دسـت‌یافتنی‌تر کـرد، بخصـوص اسـتاد راهنمایـم در دوره دکتـری.

اگرشـته تحصیلـی افـراد بـا شـاخصه‌های ذهنـی و وجـودی آن‌هـا در تضـاد نباشـد، قطعـا جزیـی از زندگـی واقعـی آن‌هـا خواهـد بـود، یعنـی بـا آن‌هـا زندگـی هـم می‌کننـد، و ایـن می‌توانـد یکـی از مصادیـق قـرار گرفتـن هـر چیـز در جـای خـودش باشـد.

۳. چه پیشـنهادی بـرای دانشـجویانی کـه قصـد تحصیـل در ایـن گرایـش را دارنـد یـا در حال تحصیـل هسـتند داریـد.

در ایـن رابطـه سـه دسـته دانشـجو ممکـن اسـت وجـود داشـته باشـند.

دسـته اول دانشـجویانی کـه از بـد حادثـه گرفتـار ریاضیات یـا بـه طـور خـاص گرایـش هندسـه شـده‌اند. توصیـه مـن بـه ایشـان ایـن اسـت کـه یـا زمینه‌هـای علاقه‌منـدی را در خـود ایجـاد کننـد و یـا تغییـر رشـته یـا گرایـش دهنـد.

دسـته دوم، دانشـجویانی کـه بـه ریاضیـات علاقه‌مندنـد و در انتخـاب گرایـش مرددنـد، توصیـه مـن بـه ایشـان ایـن اسـت کـه گرایشـی را بـه خـود تحمیـل نکنیـد و دنبـال علاقـه واقعـی باشـید، مشـروط بـر اینکـه ظرفیت‌هـای لازم را در خـود بوجـود آورده باشـید.

دسـته سـوم، دانشـجویانی کـه عـلاوه بـر علاقه‌منـدی بـه ریاضیـات حتمـا گرایـش هندسـه را در نظردارنـد وبـه نوعـی مصـداق (چـون خیالـی در دلـت آمـد نشسـت هـر کجـا کـه میگریـزی بـا توسـت)، می‌باشـند. ایـن دسـته قطعـا بـا پشـتکار و تـلاش بـه هـدف خواهنـد رسـید .

ایشان حتما جنبه خطرکردن را دارند.

> در ایـران و دانشـگاه الزهـرا، خصوصـا در دانشـکده ریاضـی اسـاتیدی هسـتند کـه همـه تحصیلاتشـان درایـران بـوده و در زمـره شـاخته شـده‌ترین افـراد رشـته خـود هسـتند.

۴. بـه نظـر شـما دانشـجویان ایـن رشـته در کـدام گرایـش هندسـه کار کننـد درآمـد بیشـتری می‌تواننـد در آینـده داشـته باشـند؟

بـه نظـرم اگـر کسـی از جنبـه درآمـدی بخواهـد بـه رشـته‌های علمـی خصوصـا علـوم پایـه نـگاه کنـد، مسـیر را اشـتباه آمـده اسـت. اگرچـه در عمـل دیـده شـده، کسـانی کـه در رشـته ریاضـی در مقطـع کارشناسـی و کارشناسـی ارشـد فارغ‌التحصیـل شـده در تصـدی امـور شـغلی خـود (هـر چنـد مسـتقیما نامرتبـط بـا رشته‌شـان) موفق‌تـر عمـل کرده‌انـد. امـا وقتـی فـردی در صـدد ادامـه تحصیـل رشـته ریاضـی بـرای دکتـری اقـدام می‌کنـد، احتمـالا اطـلاع دارد کـه در انتخـاب شـغل مناسـب بـا رشـته تحصیلی‌اش محدودیت‌هایـی وجـود دارد.

یکـی از ویژگی‌هایـی کـه عمیـق خوانـدن ریاضیـات درافـراد ایجـاد می‌کنـد، وسـعت بخشـیدن بـه عمیق‌تـر نـگاه کـردن وعمیق‌تـر فکرکـردن اسـت، البتـه بـه ایـن بسـتگی دارد کـه بـه چـه میـزان نـگاه و فکـر را در ریاضیـات بـه کار گرفتـه اسـت و بـه حـد عمـل رسـانده اسـت.

۶. چـه پیشـنهاداتی بـرای دانشـجویان گرایـش هندسـه داریـد تـا بتواننـد مقالـه بنویسـند.

داشــتن صداقــت علمــی بــا ارزش‌تریــن مولفــه تحقیــق و پژوهــش علمــی اســت.
اصولا دقت و سرعت بـه جـز مـوارد انـدک بـا هـم همخوانـی ندارنـد. مهم‌تریـن مولفه‌هـا بـرای بـه نتیجـه رسـاندن کار پژوهشـی، انگیـزه تـوام بـا تـلاش اسـت.(بـه شـرط موجـود بـودن پیـش زمینه‌هـای لازم)
در احـوال شـخصی برخـی از ریاضیدانـان معاصـر نوشـته‌اند کـه آن‌هـا هـر یـک هفتـه و ده روز یـک بسـته کاغـذ A۴ را می‌نوشــتند و دور می‌ریختنــد.
بـه روز بـودن و اسـتفاده از مراجـع و مقـالات روز. از دیگـر مهم‌تریــن مولفه‌هــای کســب موفقیــت اســت.
تبـادل نظـر بـدون تـرس، یادگیـری مطلـب حتـی مقدماتـی کـه قبـلا دیـده نشـده، پرسـیدن و ابهـام زدایـی، کـه در برخـی مـوارد شـهامت می‌خواهـد. مسـلما ذهـن شـفاف هـم زودتـر مطالـب را می‌گیـرد و هـم زودتـر بـه نتیجـه می‌رسـد. داشـتن مقدمـات و دانسـتن مقدمـات لازم بـرای شـروع پژوهـش بسـیار ضـروری اسـت.

شـناخته شـدن و تاثیرگذاربـودن بیشـتر بـه تـداوم کارهـای تحقیقـی اسـاتید بسـتگی پیـدا می‌کنـد. مثـلا در وجهـه در زمینـه تحقیقـی در ایـران بسـیار روشـن و مثبـت بـوده اسـت.IPM

۸. آیـا ایـن گرایـش از سـایر گرایش‌هـای ریاضـی سـخت‌تر اسـت؟
چنـان کـه قبـلا متذکـر شـدم، ماهیـت هندسـه ترکیبی اسـت. بـرای کار جـدی در آن بایـد علاوه‌بـر دانـش نسـبی درحـد کارشناسـی ارشـد در جبـر و توپولـوژی و آنالیـز بایـد بتـوان آن‌هـا را در هندسـه بـه کار بـرد. ایـن بـه معنـی سـخت‌تر بـودن نیسـت.
وقتـی هندسـه در سـطوح بالاتـر بـا جبـر و توپولـوژی و آنالیـز و سـایر گرایش‌هـا ترکیـب می‌شـود دنیـای رنگارنگـی از شـگفتی‌های ریاضیـات بـه وجـود می‌آیـد.

۹. آیـا اطلاعاتـی دربـاره کاربـرد ایـن گرایـش درعلـم فیزیـک(یا سـایرعلوم) و ارتباطـش بـا پیشـرفت فیزیـک داریـد؟
انیشـتین می‌گویـد "مـن زمانـی توانسـتم نظریـه نسـبیت عـام را صورت‌بنـدی کنـم کـه درس‌هایـی در زمینـه هندسـه دیفرانسـیل(ریمانی) در دانشـگاه پرینسـتون گرفتـم."
نظریه ریسمان‌ها در فیزیک یک نظریه ریاضی است.
مکانیـک کوانتومـی بـر پایـه مفاهیـم فضـای هیلبـرت اسـتوار اسـت.
مکانیـک نیوتونـی بـدون حسـاب دیفرانسـیل و انتگـرال کارایـی ندارد.
مکانیک سیالات مبتنی بر توابع مختلط است...
کار کـردن در فیزیـک نظـری بـدون توسـل بـه هندسـه دیفرانسـیل تصـور شـدنی نیسـت.
یوجیـن ویگـز(۱۹۹۵ -۱۹۰۲) فیزیکـدان مجارسـتانی برنـده جایـزه می‌گویـد " معجـزه مناسـب بـودن ریاضیـات بـرای فرمـول بنـدی قوانیـن فیزیـک یـک هدیـه حیـرت‌آور اسـت کـه نـه مـا آن را درک می‌کنیـم و نـه اسـتحقاق آن را داریـم. "
بـه پرسـش شـما می‌تـوان بدیـن گونـه نیـز پاسـخ داد کـه آیـا پدیـده‌ای وجـود دارد کـه بـرای مطالعـه آن بـه ریاضیـات نیـاز نباشـد؟
بسـیاری از علـوم دیگـر نظیراقتصاد، زیسـت شناسـی، شـیمی، جامعـه شناسـی و غیره
بـرای روشـمند شـدن از ریاضیـات کمـک می‌گیرنـد و بـه نوعـی از کمـال همنشـینی بهـره می‌برنـد.
البتـه در برخـی مـوارد نیـز ریاضیـات ازعلـوم دیگـر تاثیرگرفته و می‌گیـرد.
شـاید اگـر قـرار بـود جایـی بـه نـام " معبـد علـم " تاسـیس شـود برسـر در آن احتمـالا می‌نوشـتند " اگـر ریاضیـات نمی‌دانیـد بـا تردیـد وارد شـوید. "

دو سـایت معتبـر هسـتند Arxiv.org سـایت انجمـن ریاضـی آمریـکا و ریاضیدانـان رشـته‌ها و گرایشـهای مـورد نظرتـان را پیـدا کنیـد.

۱۱.آیـا پیشـنهادی بـرای یادگیـری نـرم افزارهـا بـه دانشـجویان ایـن گرایـش داریـد؟
MAPLE ,Mathematica ,MATLAB قطعـا نـرم افزارهایـی هسـتند کـه درپژوهش‌هـا موثـر هسـتند. بـرای نمونـه اسـتفاده از نـرم افزارهـا در حـل مسـئله چهـار رنـگ انـکار ناپذیـر اسـت.
البتـه لازم نیسـت همـه سـه مـورد بـالا را بدانیـم، احتمـالا دانسـتن یکـی از آن‌هـا می‌توانـد نیازهـای نـرم افـزاری را برطـرف کنـد.
Latex (فارسـی و انگلیسـی) اسـت. نـرم افـزار دیگـری کـه دانسـتن آن ضـروری اسـت.

نمایشهای جبر لی

در کاربردهای جبر لی در فیزیک، با خود جبر لی کار نمیکنیم؛ بلکه با نمایش خط جبر کار خواهیم کرد.حتی بررسی ساختار جبر نیز بوسیله نمایشها انجام میشود. این بخش را با توضیح مختصری در مورد مفهوم هممورفیسم جبر لی شروع خواهیم کرد. ما به این مفهوم نیاز داریم؛ زیرا نمایش جبر لی در حقیقت هممورفیسم جبر لی بین جبر لی دادهشَده و یک جبر لی خطی (جبر لی که شامل عملگرهای خط است) میباشد.

هممورفیسم های جبر لی

در ایـن زیربخـش، بـا تعریـف هممورفیسـم جبـر لـی شـروع میکنیـم و توضیـح مختصـری دربارهـی بعضـی از ایدههـا و فرضیههـا داده میشـود.

تعریف: فـرض کنیـد K و L دو جبـر لـی هسـتند، نگاشـت $\Phi : K \longrightarrow L$ یـک هممورفیسـم جبـری نامیـده میشـود، اگـر دو خاصیـت زیـر را داشـته باشـد:

$$1)\forall x,y \in K, \forall \alpha,\beta \in F : \Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$$

$$2)\forall x,y \in K : \Phi([x,y]) = [\Phi(x),\Phi(y)].$$

تعریف: هممورفیسم جبر لی زمان کـه دوسـویی اسـت، ایزومورفیسـم از **K** بـه **L** نامیـده میشـود. اگـر یـک ایزومورفیسـم بیـن **K** و **L** وجـود داشـته باشـد، آنـگاه جبـر لـی **K** ایزومورفیسـم بـا جبـر لـی **L** اسـت. ایـن رابطهـی ایزومورفـی رابطـه همـارزی اسـت کـه بصـورت **K** $\cong$ **L** نشـان داده میشـود.

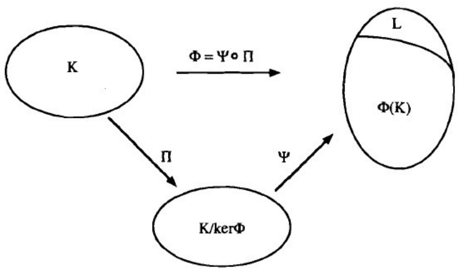
تعریف: یک ایزومورفیسم **Φ: L →− L** یک اتومورفیسم نامیده میشود.

حالا ایدهی **Φ rek** و **mi φ** یک هممورفیسم را تعریف میکنیم که بصورت لم ها و تعاریف زیر مطرح شدهاند.

تعریف: فـرض کنیـد **Φ** یـک هممورفیسـم از **K** بـه **L** باشـد، طبـق تعریـف هسـته (**Φ rek** ، **Φ**) مجموعهـای از اعضـای **K** اسـت کـه بوسـیله **Φ** بـه صفـر جبـر لـی **L** نگاشـت داده میشـوند

$$\Phi : K \longrightarrow L,$$

$$ker\ \Phi = \{x \in K | \Phi(x) = 0 \subset K\}.$$



ایزومورفیسم Ψ بین $K/rek\ \Phi$ و $(\Phi\ K)$ تصویر Φ : تمام اعضای L از هستند که بوسیله ϕ از K نگاشت داده میشوند

$$im\ \Phi = \{u \in L | \exists x \in K, u = \Phi(x)\} \subset L.$$

لم:فـرض کنیـد $\Phi : K \longrightarrow L$ یـک هممورفیسـم جبـر لـی باشـد ، آنـگاه $rek\ \Phi$ یـک ایـده آل در K و $mi\ \Phi$ یـک زیرجبـر در L اسـت .

قضیـه ۶.۳.۲: فـرض کنیـد $\Phi : K \longrightarrow L$ یـک هممورفیسـم جبـر لـی باشـد ، آنـگاه جبـر لـی خـارج قسـمت $K/rek\ \Phi$ ، بـا جبـر لـی $mi\ \Phi$ ایزومـورف اسـت.

$$K/rek\ \Phi \cong mi\ \Phi,$$

علاوه بر آن ایزومورفیسم $\Psi : K/ker\,\Phi \longrightarrow im\,\Phi$ که در آن شرط $\Phi = \Psi \circ \Pi$ صدق میکند ، منحصر بفرد است.در نظر داشته باشیم که نگاشت Π اعضای K را به کلاس هم ارزی مربوطه اش در $K/ker\,\Phi$ می برد. معلوم نیست Φ پوشاست یا نه بنابراین بخشی از L را در نظر می گیریم Φ **را پوشش می دهد.**

قضیه: فرض کنید $\Phi : K \dashrightarrow L$ یک همومورفیسم جبر لی باشد ، و I ایده آل از K باشد به قسمی که $I \subset ker\,\Phi$ باشد ، آن گاه یک همومورفیسم منحصربفرد Ψ وجود دارد ، به طوری که

$\Psi : K/I \dashrightarrow L,\ .\Phi = \Psi \circ \Pi$

همریخت یا همومورفیسم

تعریف : یک هم‌ریختی، نگاشتی بین دو ساختار جبری از یک سنخ می‌باشد که عملیات ساختارها را حفظ می‌کند؛ یعنی نگاشتی مانند $f{:}A \to B$ بین دو مجموعه A و B که هردو به یک ساختار و در نتیجه به یک عملگر مجهز باشند، چنان‌که اگر * عملی روی این ساختار باشد (در اینجا برای ساده‌سازی فرض می‌کنیم که عملگر مد نظر یک عملگر دوتایی است)، آن گاه برای هر $x,y \in A$ داریم:

$$f(x*y)=f(x)*f(y)$$

میگویند f عملیات را حفظ می کند و با آن سازگار است.

مثال ها

اعداد حقیقی تشکیل یک حلقه می‌دهند که در آن، هم عمل جمع وجود دارد و هم عمل ضرب. مجموعه¬ی تمام ماتریس‌های۲×۲ نیز تحت اعمال جمع و ضرب ماتریسی تشکیل یک حلقه می‌دهند. اگر ما تابعی بین این دو حلقه (اعداد حقیقی و ماتریس‌های ۲×۲) به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f(r) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

که در آن r یک عدد حقیقی¬ست، آن¬گاه f هم‌ریختی بین حلقه‌ها خواهد بود، چرا که f هم جمع را حفظ می **کند** هم ضرب را:

$$f(r+s) = \begin{bmatrix} r+s & 0 \\ 0 & r+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = f(r) + f(s)$$

$$f(rs) = \begin{bmatrix} rs & 0 \\ 0 & rs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = f(r)f(s)$$

*نکته: با افزودن چند شرط همریختی به یکریختی، درون ریختی، برون ریختی، خودریختی و تکریختی تبدیل می شود که در شماره های بعدی مجله به آن می پردازیم.

قسمتی از مقاله‌ی

«مشتق روی جبرهای گروهی»

گردآورنده:الهه یوسفی

۱ – ۴ مقدمه

اولین بار ”جانسون“ مشتق روی جبرهای گروهی را مورد بررسی قرار داد. او حدس زد که هر مشتق مانند D روی $L^1(G)$ به فرم ad_μ است، که در آن $\mu \in M(G)$ بسیاری از ریاضیدانان سوال مطرح شده توسط «جانسون» را مورد مطالعه قرار دادند و در حالت های خاص، به آن پاسخ مثبت دادند؛ [۶، ۱۳] را ملاحضه فرمایید. سرانجام «لوزرت » در حالت کلی به سوال ”جانسون“ پاسخ مثبت داد. در حقیقت نشان داد اگر D یک مشتق روی $L^1(G)$ باشد،

آنگاه اندازه $\mu \in M(G)$ وجود دارد به طوری که $D = ad_\mu$. پس از

«لوزرت بادر»، همکاران با استفاده از نظریه «نقطه ثابت» روش ساده‌ای

برای سوال مطرح شده توسط «جانسون» مطرح کردند.

در این فصل در ابتدا مشتق های روی جبر باناخ $L^\infty_0(G)^*$ مورد بررسی قرار میگیرد. سپس به عنوان نتیجهای از آن به مطالعه مشتق روی جبر باناخ $(M(G)^*_0)^*$ می پردازیم.

۲ – ۴ مشتق روی جبرهای باناخ $L^\infty_0(G)^*$ و $(M(G)^*_0)^*$

برای مطالعه مشتقهای روی جبرهای باناخ $L^\infty_0(G)^*$ و $(M(G)^*_0)^*$ به گزارهی زیر نیاز است.

گزاره ۴ . ۱: فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده، و عنصر $E \in \xi_1(G)$ نقطهی انباشتگی یک همانی تقریبی کراندار در مرکز $L^1(G)$ نسبت به توپولوژی ضعیف* در $L^1(G)^{**}$ یا $M(G)^{**}$ باشد. فرض کنیم $D' : E\Box L^\infty_0(G)^* \to L^\infty_0(G)^*$ یک مشتق باشد. در این صورت عنصر $p \in (M(G)^*_0)^*$ وجود دارد به طوری که $D' = ad_p$.

اثبات: تابعهای $D_1 : L^\infty_0(G)^* \to E\Box L^\infty_0(G)^*$ و $D_2 : E\Box L^\infty_0(G)^* \to L^\infty_0(G)^*$ را با ضابطههای

$$D_1(E\Box m) = E\Box D'(E\Box m) \quad \text{و} \quad D_2(E\Box m) = D'(E\Box m) - E\Box D'(E\Box m)$$

تعریف میکنیم. به وضوح $D_1 + D_2 = D'$. به ازای هر $m_1, m_2 \in L^\infty_0(G)^*$ داریم :

$$\begin{aligned} D_1(E\Box m_1\Box E\Box m_2) &= E\Box D'(E\Box m_1\Box E\Box m_2) \\ &= E\Box(D'(E\Box m_1)E\Box m_2 + E\Box m_1\Box D'(E\Box m_2)) \\ &= D_1(E\Box m_1)\Box E\Box m_2 + E\Box m_1\Box E\Box D'(E\Box m_2) \\ &= D_1(E\Box m_1)\Box E\Box m_2 + E\Box m_1\Box D_1(E\Box m_2). \end{aligned}$$

بنابراین D_1 یک مشتق است. به علاوه، چون به ازای هر $\varphi \in L^1(G)$ تابعهای $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(G)$ وجود دارند به طوری که $\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi$، داریم:

$$D_1(\varphi) = D_1(\varphi_1 * \varphi_2) = D_1(\varphi_1)\Box\varphi_2 + \varphi_1\Box D_1(\varphi_2).$$

از ایده آل بودن $L^1(G)$ در $L^\infty_0(G)^*$ و تساوی بالا میتوان نتیجه گرفت که:

$$D(L^1(G)) \subseteq L^1(G).$$

پس $D_1|_{L^1(G)}$ یک مشتق روی $L^1(G)$ است. بنابر قضیه ۱ . ۷۰، عنصر $\nu \in M(G)$ وجود دارد، به طوریکه به ازای هر $\varphi \in L^1(G)$،

$$D_1(\varphi) = \varphi * \nu - \nu * \varphi.$$

بدون کاسته شدن از کلیت مساله میتوان فرض کرد تور (e_i) نسبت به توپولوژی ضعیف* در $L^1(G)^{**}$ یا $M(G)^{**}$ به E همگراست. بنابراین:

$$wk^*\lim(e_i\Box D'(E\Box m)) = E\Box D'(E\Box m) = D_1(E\Box m).$$

چون D_1 یک مشتق است، به ازای هر $m \in L^\infty(G)_*$ داریم:

$$D_1(E\square m) = wk^*\lim_i \left(D_1(e_i\square E\square m) - D_1(e_i)\square E\square m\right)$$

$$= wk^*\lim_i \left(D'(e_i\square m) - D'(e_i)\square m\right) \quad (۴-۱)$$

$$= wk^*\lim_i \left(e_i\square m\square\nu - (\nu * e_i)\square m - (e_i * \nu - \nu * e_i)\square m\right).$$

بنابر قضیه ۱.۵۸، داریم: $e_i * \nu = \nu * e_i$.

چون $m\nu \in L^1(G)^{**}$ داریم:

$$wk^*\lim_i (e_i\square m\nu) = E\square m\nu.$$

از آنجا که ν در مرکز توپولوژیک $M(G)^{**}$ است و تور $(e_i\square m)$ نسبت به توپولوژی ضعیف* در $L^1(G)^{**}$ یا $M(G)^{**}$ به $E\square m$ همگراست، نتیجه میشود که:

$$wk^*\lim_i (\nu * e_i\square m) = \nu E\square m. \quad (۴-۲)$$

از این روابط و رابطه (۴ − ۱) داریم:

$$D_1(E\square m) = wk^*\lim_i (e_i\square m\nu - \nu e_i\square m) = E\square m\nu - \nu E\square m.$$

توجه میکنیم:

$$D'(E) = D'(E\square E) = D'(E)\square E + E\square D'(E).$$

بنابراین:

$E\square D'(E) = 0$. پس به ازای هر $m \in L^\infty(G)_*$

داریم:

$$0 = (m\square D'(E) = m\square E\square D'(E.$$

لذا:

$$D'(E) \in ran(L^\infty(G)_*).$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} D_2(E\square m) &= D'(E\square m) - E\square D'(E\square m) \\ &= D'(E)\square E\square m + E\square D'(E\square m) - E\square D'(E\square m) \\ &= D'(E)\square m. \end{aligned}$$

بنابراین، برد D_2 در $ran(L^\infty(G)_*)$ است. همچنین به ازای هر $m_1, m_2 \in L^\infty(G)_*$ از رابطه (۴ − ۲) داریم

$$\begin{aligned} D_2(E\square m_1\square E\square m_2) &= D'(E)\square(m_1\square E\square m_2) \\ &= (D'(E)\square m_1)\square E\square m_2 \\ &= D_2(E\square m_1)\square E\square m_2. \end{aligned}$$

بنابراین D_2 یک ضربگر چپ از $(E\square L^\infty(G))_*$ به توی $ran(L^\infty(G)_*)$ است و

$$D_2(E\square m) = D'(E)\square E\square m = D'(E)\square m - E\square m\square D'(E).$$

قرار میدهیم:

$$p = \nu - D'(E).$$

داریم:

$$\begin{aligned} ad_p(E\square m) &= p\square E\square m - E\square m\square p \\ &= (\nu - D'(E))\square E\square m - E\square m(\nu - D'(E)) \\ &= \nu\square m - D'(E)\square m - E\square m\nu - E\square m\square D'(E) \\ &= \nu - D'(E)\square m - E\square m\nu \\ &= D_1(E\square m) + D_2(E\square m). \end{aligned}$$

بنابراین حکم برقرار است.

گزاره ۴ . ۲: فرض کنیم G یک گروه [SIN] و $D : L_0^\infty(G)^* \to L_0^\infty(G)$ یک مشتق باشد. در این صورت عنصر $p \in (M(G)_0^*)^*$ و ضربگر چپ $\Delta: L_0^\infty(G)^* \to ran(L_0^\infty(G))$ وجود دارند؛ به طوریکه $D = ad_p + \Delta$.

اثبات: بنابر گزاره ۴۵ . ۱، $L^1(G)$ دارای همانی تقریبی (e_i) با کران یک مشمول در مرکز آن است. فرض کنیم $E \in \xi_1(L^1(G)^{**})$ یک نقطه انباشته (e_i) نسبت به توپولوژی ضعیف* در $L^1(G)^{**}$ یا $M(G)^{**}$ باشد. فرض کنیم D' تحدیدی از D به $E\square L_0^\infty(G)^*$ باشد. به وضوح D' یک مشتق است. بنابر گزاره ۴ . ۱ عنصر $p \in (M(G)_0^*)^*$ وجود دارد به طوریکه به ازای هر $m \in L_0^\infty(G)^*$، $D'(E\square m) = p\square E\square m - E\square m\square p$.

قرار می دهیم، $\Delta = D - ad_p$. ثابت میکنیم Δ فضای $L_0^\infty(G)^*$ را در $ran(L_0^\infty(G))$ تصویرمیکند. به ازای هر $m \in L_0^\infty(G)^*$ داریم:

$$\Delta(m) = \Delta(E\square m) + \Delta(m - E\square m) = \Delta(m - E\square m). \quad (۴ - ۳)$$

چون Δ یک مشتق است، به ازای هر $n \in L_0^\infty(G)^*$ داریم

$$\begin{aligned} n\Delta(m - E\square m) &= \Delta(n(m - E\square m)) - \Delta(n)(m - E\square m) \\ &= \Delta(n\square(m - E\square m)) - \Delta(n\square m - n\square E\square m) \\ &= \Delta(n\square(m - E\square m)). \end{aligned}$$

بنابر رابطه (۴ − ۳):

$$\begin{aligned} \Delta(n\square(m - E\square m)) &= \Delta(n\square(m - E\square m)) - E(n\square(m - E\square m))) \\ &= \Delta(n\square m - n\square E\square m - E(n\square m - n\square E\square m)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین.

$$\Delta(m) = \Delta(m - E\square m) \in ran(L_0^\infty(G)^*)$$

لذا Δ یک ضربگر چپ است.

نتیجه ۴ . ۳: فرض کنیم G یک گروه موضعا فشردهی آبلی و $D : L_0^\infty(G)^* \to L_0^\infty(G)$ یک مشتق باشد. در اینصورت عنصر $p \in (M(G)_0^*)^*$ و ضربگر چپ $\Delta: L_0^\infty(G)^* \to ran(L_0^\infty(G))$ وجود دارند، به طوری که $D = ad_p + \Delta$.

نتیجه ۴ . ۴: فرض کنیم G یک گروه فشرده و $D : L^1(G)^{**} \to L^1(G)$ یک مشتق باشد. در اینصورت عنصر $p \in M(G)^{**}$ و ضربگر چپ $\Delta: L^1(G)^{**} \to ran(L^1(G)^{**})$ وجود دارند، به طوریکه $D = ad_p + \Delta$.

گزاره ۴ . ۵: فرض کنیم G یک گروه [SIN] و $D : (M(G)_0^*)^* \to L_0^\infty(G)^*$ یک مشتق باشد.در این صورت عنصر $p \in (M(G)_0^*)^*$ و ضربگر چپ $\Delta: (M(G)_0^*)^* \to ran(L_0^\infty(G)^*)$ وجود دارند به طوریکه $D = ad_p + \Delta$.

اثبات: از ایدهآل بودن $L_0^\infty(G)^*$ در $M(G)^{**}$ و با توجه به اینکه $\xi_1(L_0^\infty(G)^*) \subseteq L_0^\infty(G)^*$ داریم:

$$E\Box L_\circ^\infty(G)^* = E\Box(M(G)_\circ^*)^*.$$

ادامه اثبات مشابه گزاره ۴ . ۲ است.

گزاره ۴ . ۶: فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و $m \in L_\circ^\infty(G)^*$. در این صورت برد مشتق ad_m در $ran(L_\circ^\infty(G)^*)$ در $L^1(G)^{**}$ است، اگر و تنها اگر $\pi(m) \in Z(M(G))$.

اثبات: فرض کنیم به ازای هر $n \in L_\circ^\infty(G)^*$،

$$n\Box m - m\Box n \in ran(L_\circ^\infty(G)^*).$$

بنابر گزاره ۱ . ۷۰ ، به ازای هر عنصر $\nu \in M(G)$ وجود $p \in L_\circ^\infty(G)^*$ دارد به طوریکه $\nu = \pi(p)$. از گزاره های ۳ . ۱ و ۳ . ۳ نتیجه میشود که:

$$\pi(m)\nu - \nu\pi(m) = \pi(m\Box p - p\Box m) = 0.$$

بنابراین:

$$\pi(m) \in Z(M(G)).$$

برعکس، فرض کنیم $\pi(m) \in Z(M(G))$؛ در این صورت به ازای هر $n \in L_\circ^\infty(G)^*$ داریم:

$$\pi(n\Box m - m\Box n) = \pi(n)\pi(m) - \pi(m)\pi(n) = 0.$$

بنابر گزاره ۳ . ۳:

$$n\Box m - m\Box n \in ran(L_\circ^\infty(G)^*).$$

بنابراین اثبات کامل است.

گزاره ۴ . ۷: فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و $m \in (M(G)_\circ^*)^*$. در این صورت برد مشتق $ad_m : (M(G)_\circ^*)^* \to ran(L_\circ^\infty(G)^*)$ در $M(G)^{**}$ نسبت به $M(G)^{**}$ است، اگر و تنها اگر $\bar{\pi}(m) \in Z(M(G))$.

اثبات: فرض کنیم به ازای هر $n \in (M(G)_\circ^*)^*$،

$$n\Box m - m\Box n$$

عنصری از $ran(L_\circ^\infty(G)^*)$ نسبت به $M(G)^{**}$ باشد. بنابر گزاره ۲ . ۱۹ به ازای هر عنصر $\nu \in M(G)$ $p \in (M(G)_\circ^*)^*$ وجود دارد، به طوری که $\nu = \bar{\pi}(p)$. بنابر گزاره های ۳ . ۳ و ۳ . ۱ داریم:

$$\bar{\pi}(m)\nu - \nu\bar{\pi}(m) = \pi(mp - pm) = 0.$$

بنابراین:

$$\bar{\pi}(m) \in Z(M(G)).$$

برعکس، فرض کنیم $\bar{\pi}(m) \in Z(M(G))$، در اینصورت به ازای هر $n \in (M(G)_\circ^*)^*$ داریم:

$$\bar{\pi}(n\Box m - m\Box n) = \bar{\pi}(n)\bar{\pi}(m) - \bar{\pi}(m)\bar{\pi}(n) = 0.$$

از رابطه بالا و گزاره ۳ . ۳ نتیجه می شود که $n\Box m - m\Box n$ عنصری از $ran(M(G)_\circ^*)^*$ است.

کوهن-مکالی بودن حلقه $R_{(I)a,b}$

گرد آورنده: رسول رسول زاده

این فصل شامل سه بخش است. در فصل های اول و دوم، به ترتیب، مفهوم کوهن-مکالی بودن و فانکتور کوهمولوژی موضعی معرفی میشوند. در بخش سوم نشان داده میشود که کوهن-مکالی بودن حلقه $R_{(I)a,b}$ به انتخاب عناصر a و b بستگی ندارد و فقط به کوهن-مکالی بودن حلقه R وابسته است.

حلقه های کوهن-مکالی

فرض کنید R یک حلقه جابجایی، یکدار و M یک R – مدول باشد. $x \in R$ روی M

منظم نامیده میشود، هرگاه x روی M یک نامقسوم علیه صفر باشد. دنباله

ازعناصر R یک رشتهی منظم روی M نامیده میشود، هرگاه به ازای هر x_i ، ()

روی M( )/M M(منظم باشد و M. فرض کنید I یک ایدهآل از R باشد. اگر عناصر یک رشته منظم روی M از I انتخاب شوند، گوییم $x_1,...,x_n$ یک رشتهی منظم روی M در I است. یک رشته منظم $x_1,...,x_n$ روی M در I ماکسیمال نامیده میشود، هرگاه نتوان عضو $y \in I$ را چنان پیدا کرد که $x_1,...,x_{n,y}$ یک رشتهی منظم روی M باشد.

اکنون فرض کنید R نوتری و M نیز یک R_مدول متناهی مولد باشد. روشن است که هر ۵۶

رشته منظم روی M در I قابل توسیع به یک رشته منظم ماکسیمال روی M در I است و طول چنین رشته منظم ماکسیمالی، متناهی است. بعلاوه، قضیهی زیر که به «قضیه ریس» مشهور است، در مورد طول رشتههای ماکسیمال روی M در I ثابت شدهاست.

گزاره: فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R_ مدول متناهی مولد باشد. اگر I ایدهآلی از R باشد؛ به طوریکه $IM \neq M$، آنگاه تمام M –رشتههای ماکسیمال در I طول یکسانی برابر با $\{\min\{i : Ext^i_A(A/I,M) \neq 0$ دارند.

تعریف: فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R_مدول متناهی مولد باشد. اگر I ایدهآلی از R باشد به طوری که $IM \neq M$ آنگاه طول مشترک M –رشته های ماکسیمال در I را با $grade(I,M)$ نشان داده میشود. بعلاوه، اگر $IM = M$، با در نظر گرفتن

$$grade(I,M) = \infty$$

تعریف را کامل کرده و این طول مشترک را نمره I نسبت به M مینامند.

تعریف: در تعریف قبل فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی نوتری باشد و ایدهآل را ایدهآل ماکسیمال m بگیرید. در این صورت grade(m,M) را با $depth_M$ نشان میدهند و آن را ژرفای M مینامند.

تعریف: فرض کنید R یک حلقه موضعی نوتری باشد. R_مدول متناهی مولد ناصفر M کوهن-مکالی نامیده میشود، هرگاه $depth_{M} = dim M$. اگر R به عنوان R –مدول، کوهن-مکالی باشد، آنگاه R حلقه کوهن-مکالی نامیده میشود.

کوهمولوژی موضعی

تعریف: فرض کنید R یک حلقه جابجایی نوتری، a ایدهآلی از R و M یک R_مدول باشد. در این صورت:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup_{n} \in \mathbb{N}(\circ :_M \mathfrak{a}^n)$$

مجموعه تمام عضوهایی از M است که بوسیله توانی از a صفر میشوند. این مجموعه زیرمدولی از M است. به ازای همریختی R –مدولی مانند $f:M\to N$ ، داریم:

$f(\Gamma_a(M)) \subseteq (\Gamma_a(N))$.

در نتیجه، نگاشت $\Gamma_a(f) : \Gamma_a(M) \longrightarrow \Gamma_a(N)$ چنان وجود دارد که اثر آن روی هر عضو $\Gamma_{a(M)}$ همانند اثر نگاشت f است. در ذیل، فرض کنید $C_{(R)}$ کاتگوری R –مدولها و R –همریختیها باشد. در این صورت Γ_a یک فانکتور R –خطی

همورد از $C_{(R)}$ به خودش است و آن را فانکتور a_تاب مینامند. i_اُمین فانکتور مشتق شدهی راستفانکتور Γ_a، با نماد $H^i_{\mathfrak a}(-)$ نمایش داده میشود.

فرض کنید $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه و $\lceil_R : C(R') \longrightarrow C(R)$ فانکتور حاصل از تحدید مقادیر (به کمک f) باشد. لذا اگر M' یک R'–مدول باشد و $i \in N$، آنگاه مدولهای

$$H^i_{\mathfrak a}(M'\lceil_R) \qquad H^i_{\mathfrak aR'}(M')\lceil_R$$

با معنی خواهند بود. برای اولی، i_اُمین مدول کوهمولوژی موضعی M' را نسبت به a_R'، سپس R'_مدول حاصل را (به کمک f) بعنوان R_مدول در نظر میگیریم. برای دومی، ابتدا، M' را (به کمک f) بعنوان R_ مدول گرفته و سپس i_اُمین مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به a را به دست میآوریم.

قضیه (قضیه استقلال): فانکتورهای $\Gamma_{aR'}(-)\lceil_R$ و $\Gamma_a(-\lceil_R)$ از $C(R')$ به $C(R)$ باهم برابرند. بعلاوه، یکریختی یکتای

$$\Lambda = (\lambda^i)_{i\in\mathbb{N}_0} : (H^i_{\mathfrak aR'}(-)\lceil_R)_{i\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow (H^i_{\mathfrak a}(-\lceil_R))_{i\in\mathbb{N}}$$

.

از دنباله های قویاً مرتبط منفی از فانکتورهای همورد از $C_{(R')}$ به $C_{(R)}$ وجود دارد به طوریکه λ^0 هم ارزی طبیعی همانی است. بویژه، برای هر $i \in N$، فانکتورهای $H^i_{\mathfrak a}(-\lceil_R)$ و $H^i_{\mathfrak aR'}(-)\lceil_R$ به طور طبیعی هم ارزند.

قضیه (قضیه صفر شدن گروتندیک): فرض کنید R یک حلقه نوتری، a یک ایدهآل R و M یک R_مدول باشد. در این صورت، به ازای هر $i > \dim M$، $H^i_{\mathfrak a}(M) = 0$.

قضیه (قضیه ناصفر شدن گروتندیک): فرض کنید (R,m) یک حلقهی موضعی و M یک R_مدول متناهی مولد ناصفر با بعد n باشد. در این صورت $H^n_{\mathfrak m}(M) \neq 0$.

قضیه: فرض کنید R یک حلقه نوتری، I ایدهآلی از آن و M یک R_مدول متناهی مولد باشد که $IM \neq M$. در این صورت:

$$\mathrm{grade}(I,M) = \inf\{i \mid H^i_I(M) \neq 0\}.$$

کوهن–مکالی بودن حلقه $R(I)_{a,b}$

لم: فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی باشد و $a,b \in R$. در این صورت $\dim R(I)_{a,b} = \dim R$ و $\mathrm{depth}(R(I)_{a,b}) = \min\{\mathrm{depth}\ R, \mathrm{depth}\ I\}$

برهان: ابتدا دقت کنید با توجه به برهان گزاره ۳ . ۲ . ۳ تساوی $M^2 = mIt + m$ a,b حاصل میشود. این تساوی نشان میدهد که $\sqrt{m_{R(I)a,b}} = M$. در اینجا توسیع نسبت به همریختی طبیعی $R \to R(I)$ منظور شدهاست. این تساوی به همراه قضیه استقلال کوهمولوژی موضعی، یعنی قضیه نشان میدهد که به ازای هر i ، یکریختی زیر وجود دارد:

$$H^i_M(R(I)_{a,b}) \cong H^i_{\mathfrak m}(R(I)_{a,b})$$

.

از طرف دیگر، چون به عنوان R– مدول، $R(I)_{a,b}$ با $R \oplus I$ یکریخت است، پس به ازای هر i، یکریختی ذیل از R_ مدولها وجود دارد:

$$H^i_{\mathfrak m}(R(I)_{a,b}) \cong H^i_{\mathfrak m}(R \oplus I) \cong H^i_{\mathfrak m}(R) \oplus H^i_{\mathfrak m}(I)$$

.

بنابراین به ازای هر i ، به عنوان R_مدول، یکریختی زیر برقرار است:

$$H^i_{\mathfrak m}(R(I)_{a,b}) \cong H^i_{\mathfrak m}(R) \oplus H^i_{\mathfrak m}(I)$$

.

با توجه به یکریختی فوق و قضیههای بالا تساوی $\dim_{R(I)a,b} = \dim R$ حاصل میشود. برای اثبات تساوی دوم، دوباره از یکریختی اخیر استفاده میکنیم. ابتدا توجه کنید که، یکریختی اخیر و قضیه ۵ . ۲ . ۳ نشان میدهد که به ازای هر $i < \mathrm{depth}\ R(I)_{a,b}$، تساوی

$$H^i_m(I) = H^i_m(R) = 0$$

برقرار است. بنابراین:

$$\operatorname{depth} R(I)_{a,b} \leq \operatorname{depth} R \quad \text{و} \quad \operatorname{depth} R(I)_{a,b} \leq \operatorname{depth} I$$

حال با فرض $n := \operatorname{depth} R(I)_{a,b}$ نتیجه می‌شود که

$$H^n_{\mathfrak{m}}(R) \oplus H^n_{\mathfrak{m}}(I) \cong H^n_{\mathfrak{m}}(R(I)_{a,b}) \neq 0.$$

لذا $H^n_{\mathfrak{m}}(R) \neq 0$ یا $H^n_{\mathfrak{m}}(I) \neq 0$. در حالت اول نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{depth} R = \operatorname{depth} R(I)_{a,b} \leq \operatorname{depth} I.$$

به طور مشابه، در حالت دوم نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{depth} I = \operatorname{depth} R(I)_{a,b} \leq \operatorname{depth} R.$$

بنابراین تساوی

$$\operatorname{depth}(R(I)_{a,b}) = \min\{\operatorname{depth} R, \operatorname{depth} I\}$$

حاصل می‌شود.

گزاره: فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد و $a,b \in R$. در این صورت $R(I)_{a,b}$ کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر R و I کوهن-مکالی باشند و $\dim I = \dim R$. بویژه، کوهن-مکالی بودن $R(I)_{a,b}$ مستقل از انتخاب عناصر a و b است و فقط به کوهن-مکالی بودن R و I وابسته است.

برهان: ابتدا فرض کنید $R(I)_{a,b}$ کوهن-مکالی باشد. از این رو

$$\dim R(I)_{a,b} = \operatorname{depth} R(I)_{a,b}.$$

لذا بنا بر تساوی و نامساوی مذکور در لم بالا داریم:

$$\dim R = \dim R(I)_{a,b} = \operatorname{depth} R(I)_{a,b} = \min\{\operatorname{depth} R, \operatorname{depth} I\} \leq \operatorname{depth} R \leq \dim R.$$

این نشان می‌دهد که $\dim R = \operatorname{depth} R$، یعنی R کوهن-مکالی است.

به طریق مشابه داریم:

$$\dim R = \dim R(I)_{a,b} = \operatorname{depth} R(I)_{a,b} = \min\{\operatorname{depth} R, \operatorname{depth} I\} \leq \operatorname{depth} I \leq \dim I \leq \dim R.$$

لذا

$$\dim R = \operatorname{depth} I = \dim I.$$

این تساوی ها نشان می‌دهد که I کوهن-مکالی و از بعد ماکسیمال است. حال فرض کنید R و I کوهن-مکالی باشند و $\dim R = \dim I$. لذا داریم:

depth($R(I)_{a,b}$) =
min{depth R,depth I}=
{min{dimR,dimI

dimR =

dimR(I) =

$'_{a,b}$

بنابراین $R_{(I)a,b}$ کوهن-مکالی است.

معرفی فیلم ریاضی

چهره‌های پنهان

در این بخش برای علاقه‌مندان به فیلم و سینما، به معرفی آثاری می‌پردازیم که روایتگر داستانی

با زمینه ریاضیات هستند. داستانهایی واقعی یا آمیخته با تخیل از نوابغ و بزرگان ریاضی که به

بیان شرح حال، ذوق و استعداد و دشواری‌های آنها میپردازند. اطلاع از شیوه زندگی، نحوه درک و

نوع تفکر نوابغ و چالشهای آنها همواره برای دیگر انسانها جذاب بوده است؛ از این رو سینما بستر مناسبی است که با زندگی این افراد متفاوت همراه شویم، دشواری مسیر آنها و قدرت اراده‌شان را ببینیم، از علاقه و نبوغ و قریحه‌شان در ریاضیات به وجد بیاییم و درنهایت آنها را الگوی خود در مسیر علم قرار دهیم.

عنوان: چهره‌های پنهان (Hidden figures)

ژانر: درام بیوگرافی

زمان: ۱۲۷ دقیقه

تاریخ پخش: ۲۰۱۶

کارگردان: Theodore Melfi

نویسندگان: Theodore Melfi, Allison Schroeder

بازیگران:

Taraji P. Henson, Octavia Spencer, Janelle Monáe, Kevin Costner, Kirsten Dunst, Jim Parsons

اثری اقتباسی از رمانی به همین نام است که بر اساس داستان زندگی «چهره‌های پنهان» فیلم

واقعی سه زن سیاه‌پوست آمریکایی/آفریقایی نوشته‌شده‌است. عنوان فیلم در بردارنده ایهام

ظریفی‌ست از چهره‌ها و ارقام پنهان که توسط اکثریت جامعه نادیده گرفته می‌شوند. سه چهره اصلی داستان، مهندس «مری جکسون»، سرپرست «دوروتی وان» و ریاضیدان «کترین جانسون»، سه زن مقاوم و سرسخت هستند که با تلاش و امید در برابر ناملایمات جامعه نژادپرست و جنسیت زده آمریکا در دهه شصت، مسیر خود را به درستی می پیمایند.

در سال ۱۹۶۱ در بحبوحه جنگ سرد که ایالات متحده و روسیه در رقابتی شدید برای فرستادن فضانوردان به خارج از جو زمین بودند، کترین، از محاسبه‌گران ارشد سازمان ملی فضانوردی آمریکا (NASA)، پیش از الکترونیکی شدن سیستم‌ها بود. وظیفه او انجام محاسبات ریاضی در سطح

پیشرفته برای دانشمندان و مهندسان مردی است که مسیر پرتاب و حرکت موشکهای فضایی را طراحی می‌کنند. کترین که از کودکی نبوغ خود را در ریاضیات بروز داده بود، مدار گردش فضانورد آمریکایی را بصورت دقیق محاسبه نمود. این محاسبات که سبب شد فضاپیمای «جان گلن» فضانوردان از مدار زمین خارج شوند و سالم بازگردند، به مفهوم ارقام پنهان در عنوان فیلم اشاره دارد و یادآور خدمات ریاضیات در پیشرفت‌های اساسی بشر است. در همین زمان، دوروتی وان که سرپرست دیگر زنان سیاه‌پوست محاسبه‌گر است، متوجه می‌شود نخستین رایانه موجود در ناسا که توسط شرکت IBM طراحی شده است می‌تواند تمام محاسبات ریاضی را ظرف چند ثانیه انجام دهد. دوروتی تلاش می‌کند با یادگیری زبان فرترن و آموختن آن به محاسبه‌گران، از اخراج خود و آن‌ها جلوگیری کند. در کنار این دو، مری جکسون با قوانین ایالتی که علیه زنان سیاه‌پوست بودند، مبارزه می‌کند تا بتواند نخستین مهندس هوافضای زن در ناسا شود.

این داستان زیبا و الهام‌بخش روایت چالش‌هایی است که این سه زن با آنها مواجه می‌شوند و تحولی که در دیدگاه دیگران نسبت به خود و قوانین نژادپرستانه ایجاد می‌کنند. کترین جانسون، شخصیت اول این فیلم در واقعیت، فیزیکدان و ریاضیدان آمریکایی/آفریقایی بود که در سال ۱۹۱۸ در آمریکا متولد شد و در ۲۴ فوریه ۲۰۲۰ درگذشت. وی در پروژه‌های مهمی نظیر پرواز به ماه با آپولو ۱۱ شرکت داشت و موفق به دریافت نشان افتخار آزادی آمریکا شد. در سال ۲۰۱۶ کترین به عنوان یکی از ۱۰۰ زن تاثیرگذار تاریخ انتخاب شد.

قطاری که در بعد چهارم گم شد.

خط مترو، از ایستگاه پارک ستریت با شاخه های جداگانه ای به هر سو می رود و شبکه به هم بافته ی پیچیده ای را تشکیل میدهد، یک مسیر اضافی، خط لیچ مورد را به خط شمونت برای قطارهایی که به بخش جنوبی شهر میروند، و خط فورست هبل برای قطارهایی که به شمال می روند مربوط می کند، هاروارد و برکلین در تونلی که در ژرفای زمین به خط کن مور برخورد می کند به هم می پیوندند و در ساعتهایی که ظرفیت کار به اوج خود میرسد، هر قطار دومی که در مسیر عکس می رود، به ایگلستون منتقل می شود. در نزدیکیهای فیلدس کورنر، خط کن مور به تونل ماوریک وصل میشود و ضمن آمدن به سطح زمین، سه کولزی سه کرور را به خط کوپلی که روی زمین است مربوط می کند. سپس دوباره زیر زمین می رود و در نزدیکی بویلستون هم هفت خط اصلی قطار زیرزمینی را در چهار سطح به هم وصل میکند، همانطور که به یاد دارید این خط در سوم مارس آغاز به کار کرد و از آن تاریخ، قطار ها میتوانند بی هیچ مانعی به هر ایستگاهی از شبکه بروند. در روز های شنبه، در همه ی خطها دویست و بیست و هفت قطار کار میکنند و نزدیک به یک میلیون و نیم مسافر را از این سو به آن سو میبرد. قطاری که در چهارم مارس در خط کمبریج دورچستر ناپدید شد، شماره ۸۶ را داشت. در آغاز کسی متوجه نبود این قطار نشد، هنگام غروب که ظرفیت کار به بالاترین میزان خود میرسد، رفت و آمد مسافران در این خط، تا حد زیادی غیرعادی بود ولی ازدحام، ازداحم است...

تنها در ساعت هفت . سی و دقیقه، جدولهایی که جای قطار ها را نشان میداد. درباره قطار ۸۶، سکوت کرده بود. باوجود این، سه روز کامل طول کشید تا یکی از تنظیم کننده ها، غیبت آن را اطلاع داد. بازرس میلکت ستریت کروس از کشیک خط هاروارد خواهش کرد یک قطار اضافی دیگر، برای پایان مسابقه هاکی در نظر بگیرد، کشیک درخواست را در ایستگاه نحویل داد. تنظیم کننده، قطار ۷۸ را که طبق معمول ساعت ۱۰ شب به ایستگاه میرود، احضار کرد. ولی حتی آن وقت هم تنظیم کننده متوجه ناپدید شدن هشتاد و شش نشد!

صبح روز بعد، در ساعتهایی که جمعیت مسافر به حداکثر خود رسیده بود، جک اوبراون از مرکز تنظیم در پارک ستریت همراه با اوون سووینی تصمیم گرفت روی جدول آزمایش کند، آیا قطار و گروه آزادی وجود دارد یا نه؟!

در اینج بود که معلوم شد هالاخر راننده، در پایان تعویض شماره خود را آویزان نکرده است. سووینی همانطور که شماره هالاخر را آویزان میکرد در گزارش خورد نوشت تعویض هالاخر در ۱۰ صبح انجام شد. در ساعت یازده و نیم سووینی دوباره جلو تابلو آمد شماره و یادداشت سر جای قبلی خود بود. سووینی که با نارضایتی غرغر میکرد رو به کشیک کرد و خواست برای او روشن کند چرا هالاخر دیر آمده است! کشیک پاسخ داد، امروز صبح اصلا او را ندیده است.

در این جا بود که سوینی به فکر افتاد ببیند به جز هالاخر چه کسی در هشتاد و شش خدمت میکند. و هنوز دو دقیقه نگذشته بود که متوجه شد دورکین بلیط فروش هم سرکار نرفته است. تنها در ساعت یازده و نیم بود که سوینی سرانجام فهمید قطار را از دست داده است!

یک ساعت و نیم بعد را به تلفن کردن به همه تنظیم کننده ها ، بازرسها و کشیکها، درهمه ی خط های مترو گذاند. بعد از ناهار هم دوباره به سراغ تلفن رفت. ساعت پنج و نیم تعویض را تمام کرد در حالی که پریشان شده بود، همه چیز را به اداره کل گزارش داد.

تا نیمه شب، تلفن های تونل ها و تعمیرگاه راه آهن شهری قطع نشد، تنها بعد از ساعت دوازده نیمه شب بود که تصمیم گرفتند مدیرکل را آگاه کنند و به خانه او زنگ زدند!

ششم مارس مدیریت مرکزتنظیم کننده ، برای نخستین بار به فکرش رسید که باید بین قطار ناپدید شده

با آگهی های زیادی که یکباره در روزنامه های آن روز، درباره خویشان و نزدیکان گم شده ، چاپ شده بود، ارتباطی وجود داشته باشد. درباره این حدس خود ، با یکی از وزرتخانه ها تماس گرفت و درست در نیمروز ، سه روزنامه ، شماره های فوق العاده خود را منتشر کردندن و چنین بود که این تاریخ بر سر زبانها افتاد .

"کلوین وایت" مدیر کل راه آهن شهری، تمام نیمه اول روز را در اداره پلیس گذراند. خانم "هالاخر" و خانم "دورکین" را خواسته بودند. ولی آنها چیزی جز این نمیتوانستند بگویند که شوهرانشان ساعت ۴ صبح سرکار رفته اند و دیگر به خانه برنگشته اند.

در نیمه دوم روز ، دیگر پلیس شهری می دانست دست کم سیصد و پنجاه نفر از مردم "بوستون" همراه قطار گم شده اند. تلفنها قطع نمی شدند و مرتب از این طرف و آن طرف ، خبر و شایعه پخش می کردند.

"وایت" به هر دری زد، نزدیک بود از خشم بترکد ولی قطار پیدا نشد ، مثل اینکه دود شده و به هوا رفته بود .. یا مثل آب ، به زمین فرو رفته بود.

ششم مارس "راجر توپه لو" ریاضی دان ، از دانشگاه هاروارد وارد صحنه شد . بعد از غروب به منزل وایت زنگ زد و به او اطلاع داد در مورد ناپدید شدن قطار ، حدسی زده است. توپه لو تاکسی گرفت و خود را به خانه وایت در حومه نیوتون رسانید.

در اینجا بود که نخستین بحث بین ریاضیدان و مدیر کل درباره قطار شماره ۸۶ که ناپدید شده بود در گرفت.

وایت که مردی چیز فهم ، تحصیل کرده و با تجربه و مدیر قابل بود با بی قراری گفت : نمی توانم درک کنم شما چه تفسیری می توانید داشته باشید!

توپه لو تصمیم گرفته بود در هر موقعیتی بر خود مسلط باشد و آرامش خود را حفظ کند او صبر و تحمل خود را از دست نمی داد.

- آقای وایت ، درک این مطلب چندان ساده نیست . من نمیخواهم بحث کنم . با کسی هم جدل ندارم . به شما حق می دهم تردید داشته باشید. ولی این تنها توضیح مکنی است که می توان در این باره داد. ببینید قطار با مسافرانش گم شده است . ولی مترو یک دستگاه بسته است ریال قطار نمیتواند از دستگاه خارج شده باشد و جایی درون همین دستگاه است.

- صدها مسافر مثل سوزنی در بار علف گم کرده باشم . تمامی دستگاه را جست و جو کرده ایم آیا به واقع گمان می کنید علاقه مندم یک قطار کامل را جایی پنهان کنم .

- - روشن است که نه ! ولی اجاره بدهید با استدلال درست جلو برویم . می دانیم چهارم مارس در ساعت ۸و ۴۰ دقیقه صبح ، قطار به استگاه کمبریج رفته است . چنددقیقه پیش از ساعت ۸و ۴۰ دقیقه ، در ایستگاه واشنگتن و پارک ستریت نزدیک به شصت مسافر سوار و چند نفری هم پیاده شده اند. این همه آن چیزی است که ما می دانیم . هیچ کدام از کسانی که به قصد ایستگاه کندال در ایستگاه مرکزی یا ایستگاه کمبریج سوار شده اند به جای مورد نظر خود نرسیده اند . قطار به ایستگاه پایانه خود، کمبریج وارد نشده است .

- وایت به زحمت خشم خود را فرو می خورد ، غرغر کنان می گفت :

- - آقای توپه لو همه این چیزها را بدون شما هم می دانستم ، قطار در تونل زیر رودخانه ، ناگهان به کشتی تبدیل شده و به آفریقا رفته است.

- - نه آقای وایت ، کوشش می کنم وضع را برای شما روشن کنم .قطار به نقطه گرهی رسیده است.

وایت منفجر شد : کدام گره ؟ تمامی مسیر دستگاه ما نظمی درجه اول دارد. هیچ مانعی در مسیر آن نیست . قطار بدون وقفه در حرکت اند .

- بازهم حرف مرا نفهمیدید. گره یک ویژگی ریاضی است . قطبی از درجه بالاست.

توضیح ها ی توپه لو به هیچ نتیجه ای نمی رسید و کلوین وایت در آغاز هیچ چیز نمی فهمید . با وجود این ، شب هنگام به ریاضی دان اجازه داد با نقشه مترو آشنا شود . ولی اول به پلیس تلفن کرد که البته نمی

توانسـت هیـچ کمکـی بـه نخسـتین تـلاش او در گشـودن ایـن راز بکنـد کـه چگونـه توپولـوژی بـا مدیریـت کل بسـتگی دارد!
توپـه لـو تاکسـی گرفـت و حرکـت کـرد تـا صبـح روی نقشـه هـای متـروی بوسـتون کار کـرد. بعـد بـه سـریعت قهـوه نوشـید ، سـاندویچی خـورد و دوبـاره بـه قصـد دیـدن وایـت حرکـت کـرد، و اینبـار بـه دفتـر او.
وقتـی وارد دفتـر شـدمدیر بـا تلـف صحبـت مـی کـرد. صحبـت بـر سـر ایـن بـود کـه بایـد، یکبـار دیگر،تمامـی تونـل ورچسـتر_کمبریج در زیـر رود خانـه چارلـز، بازرسـی شـود. وقتـی سـر انجـام گفـت و گـو تمـام شـد،وایت بـا عصبانیـت، گوشـی را روی تلفـن انداخـت و بـا چشـمان خشـمگین خـود بـه توپـه لـو خیـره شـد. اول ریـا ضـی دان سـکوت را شکسـت:
- گمـان مـی کنـم، همـه تقصیـر هـا، مربـوط بـه خـط تـازه اسـت.
وایـت دسـت هایـش را بـه لبـه میـز چسـباند و بیهـوده تـلاش کـرد در ذهـن خـود، واژه هایـی را پیـدا کنـد کـه بـرای دانشـمند، کمتـر آزار دهنـده باشـد.
سرانجام گفت:
- دکتـر (تـو پـه لـو) مـن تمـام شـب را بـا نظریـه شـما بـه سـر بـردم و اعتـراف میکنـم کـه حتـی ذره ای از آن را نفهمیـدم اکنـون چـرا خـط (بویلسـتون)؟!
(تو په لو) خیلی آرام پرسید:
- آیـا آنچـه را عصـر دیـروز دربـاره ویژگیهـای شـبکه ارتباطـی گفتـه بـودم، بـه یـاد دارید؟آیـا نـوار موبیـوس را بخاطـر مـی آوریـد کـه مـا بـه کمـک هـم آن را درسـت کردیـم. سـطحی یـک رویـه بـا یـک کنـاره؟ آیـا بتـری (کلایـن) را بـه یـاد مـی آوریـد؟
ریاضـی دان یـه بتـری شیشـه ای کوچـک (کلایـن) را از جیـب درآورد و روی میـز گذاشـت.(وایـت)خودش را عقـب کشـید،یه صندلیـه راحتیـه خـود تکیـه داد و بـه ریاضـی دان خیـره شـد.چهره او بـه سـرعت تغییـر میکرد،گاهـی حالـت خشـم ،گاهـی حالـت دسـتپاچگی،گاهی حالـت ناامیـدی و اهـی حالـت تسـلیم بـه آنچـه پیـش مـی آیـد ،در آن دیـده میشـد.
ولی (توپه‌لو) ادامه داد:
-آقـای (وایـت) دسـتگاه متـروی شـما، یـک شـبکه بـزرگ و توپولـوژی اسـت. ایـن شـبکه ،حتـی پیـش از آنکـه خـط (بویلسـتون) وارد عمـل شـود،بی انـدازه پیچیـده بـوده است.دسـتگاهی بـا درجـه ی بـالای همبنـدی هـا.
دسـتگاه را کامـلا اسـتثنایی کـرده اسـت. خـود مـن هـم، درسـت نمـی فهمم ولـی حـدس میزنم دشـوای

کار در کجاسـت: ایـن خـط تـازه، درجـه همبندی دسـتگاه را چنـان بـالا بـرده اسـت کـه مـن تصـور محاسـبه آن را هـم نمـی توانـم داشـته باشـم. بـه نظـر مـن، درجـه همبنـدی دسـتگاه بـی پایـان اسـت.
مدیـر. همـه اینهـا را در حالـت پریشـانی کامـل گـوش میکـرد و چشـمانش بـه بتـری کلایـن خیـره شـده بـود. تـو پـه لـو، ادامـه داد:

. نـوار موبیـوس، ویژگیهـای عجیبـی دارد؛ زیـرا سـطح ایـن نـوار، تنهـا یـک رویـه داد. بتـری کلایـن، از دیـدگاه توپولـوژی، پیچیـه تـر اسـت، زیـرا آن هـم بسـته و بـه هـم پیوسـته اسـت. ریاضیدانانـی کـه روی توپولـوژی کار مـی کنـن، چنـان سـطحهای

پیچیـه ای را مـی شناسـند کـه هـم نـوار موبیـوس و هـم بتـری کلایـن، در مقایسـه بـا آنهـا تنهـا بازیچـه هـای ساده ای بـه حسـاب مـی آینـد. شـبکه همبنـدی نامتناهـی، مـی توانـد نمونـه ای شـیطانی و بسـیار پیچیده از دیـدگاه توپولـوژی باشـد. آیـا مـی توانیـد تصـور کنیـد چـه ویژگیهایـی مـی توانـد داشـته باشـد؟ و توپـه لـو بعـد از یـک سـکوت طولانـی، اضافـه کـرد:

. مـن هـم تصـوری دربـاره آن نـدارم. راسـتش را بخواهید دسـتگاه متـروی شـما بـا حلقـه کمربنـدی بویلسـتون» از فهـم مـن بیـرون اسـت. مـن تنهـا مـی توانـم حـدس بزنـم.

وایـت، سـرانجام چشـم از میـز برداشـت. احسـاس کـرد دیگـر نمـی توانـد جلـو خشـم خـود را بگیـرد. بـا صـدای بلنـد و بـا لحنـی معتـرض فریـاد زد:

- و آن وقـت، بـع از همـه اینهـا، هنـوز خودتـان را ریاضیـدان میدانیـد، پروفسـور توپـه لـو؟ «توپه‌لـو بـه زحمـت جلـوی خنـده خـود را گرفـت. خیلـی زود احسـاس کـرد در چـه موقعیـت خنـده دار و احمقانـه ای قـرار گرفتـه اسـت؛ ولـی تـلاش کـرد لبخنـد خـود را پنهـان کنـد:

من متخصص توپولوژی نیستم. حقیقت این است. آقای وایت، در این زمینه من هم مثل شما تازه کارم. ریضیات، دانش بسیار گسترده ای است. من در زمینه جبر کار می کنم

صداقتی که در اعترف ریاضی دان بود، وایت را کمی قرمز کرد و گفت:

ـ اگر اینطور است و شما در این زمینه کار نکرده اید، باعذرخواهی از شما باید از یک متخصص توپولوژی دعوت کنم. آیا چنین شخصی در بوستون، پیدا می شود؟ توپه‌لو» پاسخ داد:

.هم بله و هم نه! بهترین متخصص که در دنیا وجود دارد، در انستیتو تکنولوژی کار میکند. دست وایت، به طرف تلفن دراز شد و گفت:

چه کسی است؟ همین الان شما را با هم آشنا میکنم.

. او را (ترنبول)، می نامند. ولی ارتباط برقرار کردن با او، ناممکن است. من سه روز است که تلاش میکنم. وایت، پرسید:

. مگر در شهر نیست؟ من خیلی زود او را پیدا میکنم.

. اطلاع ندارم کجاست! پروفسور ترنبول، مجرد است و در باشگاه برنا، زندگی می کند. ولی از صبح چهارم مارس به آن جا نرفته است. وایت، مثل این که ناگهان چیزی فهمیده باشد. با صدای گرفته پرسید:

. او هم در همین قطار بوده؟ ریاضی دان پاسخ داد:

. شما چه فکر میکنید؟

سکوتی طولانی حکم فرما شد. «وایت» با حیرت. گاهی به ریاضی دان گاهی به بتری شیشه ای روی میز نگاه می کرد سرانجام به صدا درآمد:

ـ اصلا نمی فهمم! تمامی دستگاه شبکه مترو را زیر رو کرده ایم. جایی وجود ندارد که قطار بتواند در آن جا ناپدید شود. تو په لو پاسخ داد:

. قطار گم نشده؛ هنوز روی خط است.

– پس کجاست؟ تو په لو، شانه هایش را بالا انداخت.

– برای قطار، جای حقیقی وجود ندارد. دستگاه در فضای سه بعدی قابل تجزیه و تحلیل نیست. اگر چیز بدتری نباشد. باید فضای چهاربعدی را در نظر گرفت.

پس قطار را در کجا می توان پیدا کرد؟ تو په لو، پاسخ داد:

. میترسم هرگز نتوانیم به چنین نتیجه ای

برسیم.

باز هم سکوتی طولانی، (وایت)، با یک لعنت سکوت را شکست. از جا پرید و بتری کلاین را از روی میز برداشت. آن را به گوشه ای انداخت و فریاد زد:

. شما پروفسور، خیلی ساده، یک دیوانه اید. بین نیمه شب و ساعت ۶ صبح، تمام خطها را از قطار خالی خواهیم کرد. سیصد نفر، تمامی مسیر یکصد و هفتاد و سه مایلی را، اینچ به اینچ بازرسی خواهند کرد. مطمئن باشید، قطار را پیدا می کنیم حالا دیگر خواهش می کنم مرا معذور دارید و از این جا بروید. وایت با خشم به دکتر توپه‌لو، نگاه می کرد.

توپه لو بیرون رفت. احساس خستگی و شکست می کرد. بدون هدف، در واشنگتن . ستریت، راه می رفت. سرانجام، به سمت ایستگاه مترو پیچید. وقتی می خواست از پله ها پایین برود، یکباره به خود آمد و بلافاصله ایستاد. به دور و بر خود نگاه کرد. به عقب برگشت، به سرعت از پله ها بالا دوید و یک تاکسی صدا کرد. تا به منزل رسیده نوشابه ای خورد و روی تخت افتاد.

ساعت سه و نیم بعداز ظهر، بنا بر عادت، گفت و گویی با دانشجوی خود درباره (جبر میدان ها و حلقه ها)، داشت. عصر، شام را با عجله در رستوران خورد؛ به خانه برگشت و دوباره کوشش کرد به

بررسی ویژگیهای شبکه ارتباطی متروی

بوستون» بپردازد. ولی مثل قبل، این کوشش هم بی نتیجه ماند. با وجود این، ریاضیدان موفق شد نتیجه هایی برای خودش به دست آورد. ساعت یازده شب، به وایت» در اداره مرکزی قطار شهری تلفن کرد:

به نظرم، احتمال دارد ضمن بازرسی امشب از خط به مشورت من نیاز داشته باشید. اجازه می دهید من هم در خدمت شما باشم؟

برخورد مدیر کل با این پیشنهاد به هیچ وجه همراه با محبت نبود. به ریاضی دان اطلاع داد اداره متروی بوستون»، خودش به تنهایی از عهده انجام این کار بی اهمیت بر می آید و هیچ نیازی به یاری پروفسورهای دیوانه کننده ای که گمان می کنند ممکن است یکی از قطارهای مترو به بعد چهارم افتاده باشد، ندارد.

تو په‌لو به پاسخ منفی و خشن مدیر کل جوابی نداد و راحت خوابید. ساعت چهار صبح، با زنگ تلفن از خوا پرید. کلوین رایت»، با لحنی پوزش خواهانه تلفن می کرد:

– از تندخویی و خشم خودم، شرمگینم پروفسور. شرم، زبان وایت را به لکنت انداخته بود و من من میکرد:

. در واقع، به یاری شما نیازمندیم. می توانید به ایستگاه سیلک - ستریت کروس، بیایید؟ توپه‌لو با کمال میل موافقت کرد. دست کم احساس می کرد، پیروز شده است. تاکسی صدا کرد و در کمتر از نیم ساعت، به ایستگاه رسید. پایین رفت و به سکوی طبقه بالا رسید. تونل کاملا روشن بود، درست مثل ساعتهای کار مترو. ولی سکو خالی بود. تنها در انتهای سکو، یک گروه کوچک هفت نفری، جمع شده بودند. در حالی که به آنها نزدیک میشد متوجه دو مأمور پلیس در میانشان شد. در آن جا، یک واگن جلودار قطار ایستاده بود. جلو آن کاملا روشن بود، ولی کسی در آن نبود. «وایت، به محض این که صدای پای پروفسور را شنید، به سمت او برگشت و با شرمندگی از او پوزش خواست و به او خوش آمد گفت:

. سپاس آقای پروفسور، سپاس که آمدید. آن وقت، دستش را دراز کرد و گفت:

. ایشن، دکتر (راجر توپه‌لو) از دانشگاه هاروارد هستند. پروفسور، اجازه بدهید، آقای کندی سرمهندس اداره را به شما معرفی کنم؛ و ایشان آقای «ویلسون، شهردار خوب شهر ما؛ ایشان هم دکتر هالوت، از بیمارستان خیریه. وایت دیگر لازم ندید راننده و دو پلیس را معرفی کند.|

توپه لوی پاسخ داد:

. خیلی دلپذیر است. خوب، آقای وایت، به نتیجه ای رسیده اید؟ مدیر کل با خجلت به همکاران خود نگاه کرد... سرانجام، به حرف آمد:

. چه گفتید؟ پوزش میخواهم ... آه، بله دکتر تو په لو ... با همه اینها گمان می کنم به بعضی نتیجه ها رسیده ا یم .

. قطار را پیدا کردید؟

. بله ... یعنی نه ... باید بگویم تقریبا پیدا کردیم. میدانیم، به هر حال، قطار روی خط است. هر شش نفره با حرکت سر، گفته وایت را تأیید کردند.

این خبر، به هیچ وجه، موجب شگفتی ریاضیدان نشد. روشن است که قطار باید روی خط باشد، جای دیگری نمی تواند باشد، زیرا تمامی دستگاه مترو، یک شبکه بسته است. با همه اینها توپه لو خواهش کرد.

اگر ممکن است، مفصل تر بگویید. راننده شجاعت پیدا کرد و گفت:

– من نور چراغ قرمز راهنما را در تقاطعی که بلافاصله پیش از ایستگاه کوپلی، است دیدم. وایت حرف او را قطع کرد و در حالی که واگن را نشان می داد، گفت:

. خط را از قطارها، به طور کامل، تخلیه کرده ایم، به جز این یکی. چهار ساعت تمام، باهمین واگن، دستگاه خط مترو را وارسی کردیم. ناگهان ، ادموند نور قرمزی در ایستگا کوپلی،دید و به طور طبیعی همان جا ترمز کرد. من عقیده داشتم این نور مربوط به خرابی چراغ راهنما است و دستور دادم راه خود را ادامه دهد، ولی شنیدم ک قطار سریع السیر دیگری از تقاطع می گذرد. ریاضیدان پرسید.

. شما آن را دیدید؟

. نمی توانستیم آن را ببینیم. تقاطع

پشت پیچ بود. ولی صدای آن را شنیدیم. هیچ تردیدی نیست که از ایستگاه کوپلی، میگذشت. بی شک، این همان قطار هشتاد و شش بود. ب جز واگن ما، هیچ قطاری روی خط نیست.

- بعد چه شد؟

. چراغ راهنما زرد شد و ادموند به سرعت حرکت کرد.

- و شما به دنبال همان قطار رفتید؟

نه! نمی دانستیم، از کدام سمت رفت است. چه بسا به سمت دیگری رفت باشیم.

این حادثه چه وقت پیش آمد؟ - بار اول، در ساعت یک و سی و هشت دقیقه.

توپه‌لو، پرسید:

. یعنی بار دیگری هم با آن قطار برخورد کردید؟

. بله، ولی در جای دیگری. جلو چراغ راهنما، در ایستگاه جنوب بودیم. ساعت دو و پانزده دقیقه و بعد باز هم در ساعت سه و بیست و هشت دقیقه ... توپه‌لو اجازه نداد حرفش را تمام کند:

. در ساعت دو و پانزده دقیقه، خود قطار را هم دیدید؟

.نه! صدای آن را هم نشنیدیم. ادموند تلاش میکرد به او برسد. ولی به ظاهر، به حلقه بویلستون، پیچید.

.و در ساعت سه و بیست و هشت دقیقه چطور؟

. باز هم چراغ قرمز. این باره در پارک ستریت، صدای آن را هم شنیدیم ..... از روی ما رد میشد.

.و دیگر؟ بار دیگری با آن برخورد نکردید؟

. بعد از چراغ راهنما، تونل با شیب زیادی سرازیر بود. ولی صدای آن را به خوبی می شنیدیم. دکتر توپه لو، من تنها از یک چیز سر در نمی آورم. چطور ممکن است یک قطار پنج روزه بی وقفه روی خط حرکت کند و یکبار هم کسی آن را نبیند؟

سخن وایت، قطع شد و دستهایش را به نشانه درماندگی بالا برد. از دور، صدای قطاری که به سرعت نزدیک میشد، به گوش رسید. صدا، به غرشی گوش خراش تبدیل شد. وقتی قطار از جایی در آن نزدیکیها میگذشت به سختی سکو را لرزاند وایت، فریاد زد:

.آهان، خودشه! درست از زیر دماغ ما، در پایین، رد شد.

او برگشت و به طرف پلکانی که به سکوی طبقه پایین می رفت، دوید. همه حاضران به جز توپه لو به دنبال او رفتن. توپه لو می دانست، همه چیز تمام شده است. او اشتباه نمی کرد. هنوز وایت موفق نشده بود تا پلکان بدود، که پلیس کشیک سکوی طبقه پایین، با شتاب از پلکان بالا آمد و با هیجان پرسید:

شما آن را دیدید؟

وایت، ایستاد. دیگران از ترس خشکشان زد. | پلیس دوم کشیک هم که از پله ها بالا می آمد، پرسید:

. شما قطار را دیدید؟

آقای ویلسون، که به کلی گیج شده بود، پرسید:

. چه اتفاقی افتاده است؟ کندی، با خشم فریاد زد:

- بالاخره قطار را دیده اید یا نه؟

پلیس کشیک پاسخ داد:

. البته که نه! آخر قطار از کنار سکوی شما گذشت. وایت که به شدت خشمگین شده بود، گفت:

. به هیچ وجه، چنین چیزی نیست!

و به پایین رفت. هفت نفری که وایت، در رأس آنها بود آماده بودند چشمان کسانی را که از سکوی پایین بالا آمده بودند، درآورند.

توپه لو به طرف وایت، رفت، به آرنج او زد به آرامی گفت:

. آقای وایت»، قطار را نمی توان دید. وایت که گیج سردرگم شده بود، به او نگاه کرد.

. ولی آخر، شما خودتان صدای آن را شنیدید. همین جا، از طبقه زیر ما عبور کرد. توپه‌لو، پیشنهاد کرد:

. آقای وایت بفرمایید بریم داخل واگن. در آن جا راحت تر می توانیم حرف بزنیم. وایت، با سر موافقت کرد؛ بعد به سمت پلیس و دو کشیک دیگر سکوی پایین برگشت با لحنی که التماس آمیز بود، پرسید:

. شما به واقع آن را ندیدید؟ پلیس پاسخ داد:

.ماصدای آن را شنیدیم. صدای یک قطار واقعی بود. از آن جاگذشت. از روی این خط به گمان من، در این جهت حرکت می کرد. . و پلیس، با انگشت نشانه خود، سمتی را نشان داد.

در این وقت، یکی از پلیسهای درجه دار گروه وایت به او دستور داد:

. شما آقای مدلونی، بروید پایین.
مدلونـی، سراسـیمه پشـت خـود را خارانـد. بـه عقب برگشـت و بـه طـرف پاییـن رفت. دو کشـیک طبقـه پاییـن هـم، همـراه او رفتنـد. توپه‌لـو بـه طـرف واگـن رفـت و بـه آرامـی در جـای خـود نشسـت. همـه بـا بـی صبـری بـه ریاضیدان چشـم دوختنـد. تـو پـه لـو کـه بـه وایـت، نـگاه مـی کـرد. آغـاز کـرد:
. وقتـی مـرا خواسـتید. اطمینـان داشـتم بـه ایـن دلیـل نیسـت کـه بـه مـن اطـلاع دهیـد قطـار گـم شـده را پیـدا کـرده ایـد؛ مگـر ایـن طـور نیسـت؟ خـوب، آیـا آنچـه هـم اکنـون پیـش آمـده بـرای نخسـتین بـار بـود؟
وایـت، کـه در جـای خـود بـی قـراری مـی کـرد، چـپ چـپ بـه سـرمهندس نـگاه کـرد و بـه طـور مبهـم گفـت:
. نـه کامـلا؛ قبـلا هـم متوجـه پیشـامد هایـی شـده بودیـم کـه توضیحـی بـرای آنهـا نداشـتیم تـو په‌لـو بـا هشـیاری و دقـت پرسـید:
. مثلا؟
. مثـلا علامـت قرمـز چـراغ راهنمایـی کسـانی کـه از ایسـتگاه ، کـدال، مراقبـت مـی کننـد. بـه تقریـب، همـان زمانـی نـور قرمـز را دیدنـد کـه مـا در ایسـتگاه جنـوب دیـده بودیـم.
.خوب، بعد.
– سـووینی، از فورسـت» تلفـن کـرد کـه «هیـل در خـط پـارک سـتریت، صـدای قطـار را دو دقیقـه بعـد از آن کـه مـا، در ایسـتگاه و کوپلـی» شـنیده بودیـم، شـنیده
اسـت. در حالـی کـه بیـن ایـن دو ایسـتگاه از مسـیر راه آهـن، بیسـت و هفـت مایـل فاصلـه اسـت. آقـای ویلسـون، دخالـت کـرد:
. دکتـر تـو په‌لـو، موضـوع ایـن اسـت کـه در چهـار سـاعت اخیـر، آدمهـای زیـادی در نقطـه هـای متفـاوت و دور از هـم، نـور قرمـز چرتـغ رهنمایـی را در یـک زمـان دیـده انـد و صـدای قطـار را شـنیده انـد. مثـل ایـن اسـت کـه ایـن قطـار، بـه طـور همزمـان، از چنـد ایسـتگاه مـی گـذرد. توپه‌لـو یـادآوری کـرد:
البته، کاملا ممکن است. مهندس اضافه کرد:
. مرتـب، گزارشـهای عجیـب و غریبـی دریافـت میکنیـم. مـردم، نـه بـه صورتـی کـه شـما آنهـا را ببینیـد بلکـه بـه صورتـی مبهـم در یـک لحظـه و بـه طـور همزمـان، در دو یـا سـه نقطـه کـه گاهـی فاصلـه بسـیار زیـادی از یکدیگـر دارنـد، پدیـدار مـی شـوند. تردیـدی نیسـت کـه قطـار روی خـط اسـت. آیـا ممکـن سـت وگنهـای قطـار از هـم جـدا شـده باشـند؟ توپـه لـو، پرسـید:
. آقـای کنـدی، شـما مطمئـن هسـتید قطـار روی خـط اسـت؟
سر مهندس بلافاصله پاسخ داد:
. اطمینـان قطعـی دارم دسـتگاهها نشـان میدهنـد، انـرژی بـرق صـرف شـده اسـت. قطـار، در تمـام شـب، بـی وقفه انـرژی مصـرف مـی کنـد. در سـاعت سـه و سـی دقیقـه، بـرق را قطـع کردیـم.
.خوب، چه پیش آمد؟
وایت، پاسخ داد:
. هیـچ! فـرض کنیـد کـه هیچـی! انرژی بـرق، برای بیسـت دقیقـه، قطـع شـد. در ایـن بیسـت دقیقـه. هیچکـدا از دویسـت نفـری کـه مراقـب بودنـد. نـه علامتهـای قرمـز را دیدنـد و نـه سـر و صـدای قطـار را شـنیدند. ولـی هنـوز پنـج دقیقـه از وصـل جریـان بـرق نگذشـته بـود کـه نخسـتین گزارشـها را دریافـت کردیـم. دو گـزارش در یـک دقیقـه داشـتیم. یکـی از بـار آرالینگسـتون، و دیگـری از اگلسـتون
وقتـی وایـت، حرفـش را تمـام کـرد، تـا مدتـی همـه سـاکت بودنـد. از پاییـن شـنیده مـی شـد یکـی از کشـیکها، دیگـری را صـدا مـی کنـد. توپه‌لـو بـه سـاعتش نـگاه کـرد. سـاعت. پنـج و بیسـت دقیقـه بـود. سـرانجا، مدیـر کل سـکوت را شکسـت:
.کوتـاه کنیـم دکتـر تـو په‌لـو: بـا شـرمندگی ناچاریـم اعتـراف کنیـم شـما در نظریـه خودتـان حـق داشـته ایـد. تـو پـه لـو پاسـخ داد:
– از محبت شما ممنونم حضرت آقا!
پزشک سینه اش را صاف کرد و گفت:
. مسافرها چی؟ آیا شما تصوری درباره ...
تو په لو، حرف او را قطع کرد:
.هیچ تصوری ندارم.
شهردار پرسید:
. دکتـر تـو پـه لـو، حـالا تکلیـف مـا چیسـت؟ چـه کارهایـی بایـد انجـام دهیـم؟
. نمیدانم؛ شما چه پیشنهادی دارید؟
آقای ویلسون، ادامه داد:((

. آن طور که از توضیحهای آقای توپه لو فهیده ام، قطار به ترتیبی که من نمیدانم وارد بعد دیگری شده است. بنابراین، قطار به معنای خاص خود، در دستگاه متروی ما نیست قطار گم شده است. آیا من درست فهیده ام؟
. تا اندازه ای؟
. ولی این پدیده غریبی است آیا به واقع، برخی از نتیجه گیری های انتزاعی ریاضیات، در خط متروی «بویلستون، به حقیقت پیوسته است؟
. همین طور است.
. و آیا هیچ امکانی وجود ندارد که بتوانیم قطار را از این ... این بعد چهارم برگردانیم؟
. من چنین امکانی را نمی شناسم.
آقای ویلسون، احساس کرد، اکنون زمان آن است که خودش همه چیز را در دست بگیرد و گفت:
. در این صورت، آقایان محترم، نقشه کار روشن است. پیش از هر کاری باید خط تازه را ببندیم تا به همه این ماجراها پایان داده شود. در این صورت، مادام که قطار ناپدید است، با آن که علامتهای قرمز چراغهای راهنما دیده می شود و با وجود سر و صداهایی که به گوش می رسد. قطارها می توانند حرکت عادی خود را از سر بگیرند. در هیچ حالتی خطر تصادف وجود ندارد. آقای وایت به نظر می رسد، نقش ین قطار مثل نقش یک مترسک باشد ... اما درباره قطار و مسافرهای گم شده ...
آقای ویلسون، در این جاژست خاصی به خود گرفت، رو به ریاضیدان کرد و ادامه داد:
. آقای توپه‌لو با من موافقید؟ تو په‌لو به آرمی سرش را تکان داد و گفت:
. به طور کامل نه! آقای «ویلسون»، توجه داشته باشید که خود من هم. از همه آن چه روی داده است، سر در نمی آورم. خیلی باعث تأسف است که نمی توانیم کسی را پیدا کنیم که قادر باشد همه چیز را برای ما روشن کند. تنها کسی که می توند به ما کمک کند. پروفسور «ترنبول، از انستیتوی تکنولوژی است. ولی او هم، در همین قطار گم شده است. به هر حال، اگر بخواهیم نتیجه گیری های مرا مورد آزمایش قرار دهیم، باید به یک متخصص مراجعه کنیم و من می توانم شما را با بعضی از آنها مربوط کنم.
و اما درباره قطاری که گم شده است ... من آن را موضوع درمان ناپذیری نمی دانم. به گمان من احتمال دارد سرانجام قطار از بخش غیر قضایی، که اکنون در آن قرار دارد، به بخش فضایی خود برگردد. از آن جا که این بخش غیر فضایی، به طور مطلق ناشناخته و دست نیافتنی است. باید اعتراف کنم که من، نه میتوانم برگشت قطار را به فضای واقعی خودش تسریع کنم نه میتوانم پیش بینی کنم که این برگشت چه موقع اتفاق می اوفتد! ... با همه اینها، اگر بویلستون را ببندید، هرگونه امکان عبور از غیرفضا به فضا را از بین برده اید. همین خط است که دستگاه را به صورت خاصی در آورده است. اگر این ویژگی را از بین ببرید، قطار گم شده هرگز برنخواهد گشت. متوجه حرف من شدید؟
روشن است که فهم حرفهای ریاضی دان، برای حاضران، چندان ساده نبود. با وجود این، سرشان را به نشانه تأیید تکان دادند. تو په لو، ادامه داد:
. اما در باره حرکت عادی قطارها، تا زمانی که قطار گم شده. در بخش غیر فضاست، تنها می توانم بعضی حقیقتها را برای شما روشن کنم نتیجه گیری اتخاذ تصمیم را به عهده خودتان بگذارم. پیش از این هم گفتم، ما نمی توانیم پیش بینی کنیم قطار گم شده، چه زمانی از بخش غیر فضا به بخش فضا منتقل می شود. نمی توانیم پیش بینی کنیم کی و کجا به فضای ما بر می گردد. به جز این، احتمال دارد، در نتیجه این انتقال، روی خط دیگری غیر از خط خودش قرار گیرد. برای این احتمال، باید پنجاه درصد در نظر گرفت. بنابراین احتمال تصادف هم وجود دارد. سر مهندس پرسید:
- دکتر توپه‌لو، برای این که احتمال این تصادف را از بین ببریم، آیا بهتر نیست خط بویلستون را باز نگه داریم، ولی اجازه بدهیم قطاری در آن کار کند؟ در این صورت. اگر قطار کم شده پیدا شود، نمی تواند با قطارهای دیگر تصادف کند.
تو په لو، پاسخ داد:
.من نمی توانم این راه را یک تدبیر احتیاطی بدانم. اقای کندی، توجه داشته باشید. قطار ممکن است در هر خطی از دستگاه پیدا شود. درست است که از دیدگاه توپولوژی، علت دشواریهای موجود، همین خط «بویلستون» است. ولی اکنون، تمامی دستگاه، یک همبندی نامتناهی دارد. به زبان دیگر، درست است که این ویژگیهای توپولوژی، بر اثر به وجود آمدن خط تازه بویلستون، پیدا شده است، ولی حالا. این ویژگیهای متعلق به تمامی دستگاه هستند. به یاد بیاورید که نخستین نشانه قطار را در نقطه ای دیده اید که با خط بویلستون، بیش از سه مایل فاصله دارد. ممک است این پرسش برای شما پیش آید: اگر حرکت قطارها را در همه خطها. به جز خط بویلستون، آغاز کنیم، آیا ممکن نیست، قطار دیگری دوباره گم شود؟ پاسخ این پرسش را به طور دقیق میدانم، ولی به گمانم باید پاسخ منفی داد. به نظر من. در این جا(اصل حذف) عمل می کند. و تها یک

قطار ممکن است در بخش غیرفضایی شبکه قرار گیرد.
ریاضیدان از جای خود بلند شد.
سرمهندس گفت:
. دکتر تو په لو، وقتی قطار پیدا شود. آیا ممکن است مسافران...
توپه‌لو، دوباره حرف او را قطع کرد
. هیچ حرفی درباره مسافران نمی توام بزنم. توپولوژی، به چنین مسأله هایی نمی پر دازد. او به سرعت. نگاهی به چهره های ناراضی و خسته هفت نفر انداخت و با لحنی تسکین دهنده گفت:
. آقایان خواهش میکنم مرا ببخشید؛ من چیزی درباره مسافران نمیدانم
سپس، به سمت وایت برگشت و اضافه کرد:
.به نظرم، امروز هیچ کمک دیگری از من ساخته نیست. شما هر وقت بخواهید، می دانید مرا در کجا پیدا کنید.
و ناگهان به عقب برگشت. از واگن برون آمد و از پله های مترو بالا رفت. در خیابان، سپیده صبح آرام آرام تاریکی شب را کنار میزد.
درباره این مشاوره ناگهانی، که در یک واگن مترو انجام گرفته بود. هیچ اطلاعی به روزنامه ها داده نشد. درباره کشیکهای طولانی شبانه در تونل های متروی بوستونه و نتیجه های مربوط به آن هم، چیزی به مرم نگفتند.
در جریان هفته بعد، توپه‌لو در چهار جلسه رسمی، با شرکت کلوین وایت، و دیگر مقامهای شهری شرکت کرد. در دو جلسه، متخصصان توپولوژی هم شرکت داشتن. از فیلادلفی، اوریستاین آمده بود. از شیکاگو ،کاشتا و از لوس آنجلس، مای کل سون
ریاضیدانان نتوانستند، به عقیده واحی برسند. هیچ کدام از آنها، دیگاه توپه‌لو را تأیید نکردند. تنها کاشتا معتقد بود در حرفهای تو په لو هسته معقولی وجود دارد. اوریستاین ، تأیید می کرد یک شبکه محدود نمی تواند دارای همبندی بی پایان باشد. ولی نتوانست این حکم را ثابت کند؛ در ضمن همبندی دستگاه را هم نتوانست محاسبه کند. مای کل سون، خیلی ساده، می گفت همه اینها، خیالهای خام و حرفهای بیهوده ای است که هیچ عمومیتی در توپولوژی ندارد. او اعتقاد داشت قطار برنمی گردد، به این معنی که یا دستگاه باز است یا دست کم در یک حالت، بسته بودن آن خراب شده است.
ولی تو پهلو، هر چه عمیقتر این مسأله را تجزیه و تحلیل می کرد، بیشتر به درستی نتیجه گیری های خودش معتقد می شد. از دیدگاه توپولوژی، دستگاه عبارت است از خانواده شبکه های چند ارزشی که در هر کدام از آنها مجموعه بی شماری ناپیوستگی وجود دارد. ولی ساختمان نهایی این شبکه تازه فضایی - فوق فضایی» راکسی نتوانسته است روشن کند. او یک هفته تمام در این باره کار می کرد، ولی توفیقی در کشف آن به دست نیاورد. پس، کارهای دیگر، او را ناچار کرد حل این مسأله را کنار بگذارد. خیال داشت در بهار، وقتی کار با دانشجویان به پایان می رسد. دوباره به این مسأله برگردد و روی آن کار کند.
در همین حال، دستگاه مترو کار می کرد، بدون این که هیچ اتفاقی بیفتد. مدیر کل مترو و شهردار شهر، تأثرات نامطبوع شبی را که به تحقیق درباره خط متروی بوستون» پرداخته بودند. تقریبا فراموش کرده بودند و همه آنچه راکه آن شب دیده بودند، یا دقیق تر، ندیده بودند، به نحوی تفسیر می کردند. ولی روزنامه ها و محفلهای اجتماعی خیال بافی های بی معنی خود را ادامه می دادند و با حمله هایی که به روایت می کردند. از او توضیح می خواستند. بعضی از خویشان مسافران گم شده. اداره راه آهن زیر زمینی بوستون را به محاکمه جلب کردند. دولت دخالت کرد و تصمیم گرفت موضوع را به دقت بررسی کند. در جلسه های کنگره، نمایندگان با خشم پرده دری می کردند. حرفهای دکتر تو پهلو، به صورتی تحریف شده، به روزنامه ها کشیده شد. ولی خود تو په لو، سکوت را شکست و ... به تدریج، بحث در این باره فروکش کرد.
هفته ها گذشت و سرانجام یک ماه

شد. کمیسیون دولتی، بررسی خود را تمام کرد. آگاهیهای مربوط به این موضوع، در آغاز از صفحه اول روزنامه ها به صفحه دوم منتقل شد، سپس به صفحه بیست و سوم رفت و سر آخر، به کلی حذف شد. گمشدگان برنگشتند و اندک مدتی، برای آنها سوگواری کردند.
یک روزه در میانه های آوریل، تو په لو، دوباره از مترو پایین رفت و از ایستگاه «چارلز - ستریت» به طرف ایستگاه هاروارد، حرکت کرد. با دقت روی
صندلی جلوی واگن اول نشست و به تماشای ریل هایی که به استقبال او می آمدند و دیوارهای یکنواخت تونل که از هم فاصله می گرفتند، پرداخت. قطار دوبار در برابر چراغ راهنما ایستاد: در این دقیقه ها، توپه‌لو بی اختیار می اندیشید، پس قطار مقابل کجاست؟ سر پیچ است یا در بعد دیگری قرار دارد؟ از روی کنجکاوی غیرارادی، به نظرش رسید کاش (اصل حذف)، اشتباه از آب در می آمد و قطار او هم به بعد چهارم می افتاد. ولی هیچ اتفاقی نیفتاد و به خیر و خوشی به ایستگاه هاروارد، رسید. به احتمالی، در میان همه مسافران، تنها برای همین یک نفر بود که مسافرت غیرعادی به نظر رسید.
هفته بعد هم، همین مسافرت را انجام داد و بعد، باز هم یکبار دیگر. این آزمایشها، هیچ پاسخی به او ندادند، نه مثبت و نه منفی؛ هیچ کدام از آنها. هیجان مسافرت اول را نداشت. تو په لو درباره نتیجه گیری های خودش به تردید افتاد. در ماه مه، برنامه رفت و آمد او به دانشگاه از طریق مترو، دوباره آغاز شد. هر بار در ایستگاه (بیکن-هیل) که در نزدیکی آپارتمان او بود. سوار می شد؛ دیگر درباره پیچ و خم های یکنواخت تونل نمی اندیشید و کمتر از پنجره واگن به بیرون نگاه میکرد. طبق عادت، روزنامه صبح را در قطار ورق میزد و یا به مطالعه رسالهٔ (فوق ریاضیات) می پرداخت.
یک روز صبح، چشم از روزنامه برداشت و ناگهان دچار احساس بدی شد. ضمن این که تلاش میکرد ترس رو به افزایش خود را مهار کند و تا حد امکان، آن را در خود فرو ببرد، به سرعت رو را به طرف پنجره برگرداند. نور درون واگن، از پنجره نفوذ می کرد و نوارهای سیاه و خاکستری. بر دیواره های تونل به وجود می آورد. چرخها، همان آهنگ اشنا را داشت. قطار دوری زد و به سرعت رد شد. با هیجان به یاد آورد که چگونه در ایستگاه (چارلز)، سوار قطار شده است. ایستگاه ، (کندال) را به خاطر آورد: دختر بچه ای که گریه ی کرد. آگهی بستنی و قطار مقابل که از ایستگاه مرکزی می آمد. در حالی که بسته صبحانه را روی زانوهایش نگه داشته بود، به دور و برش نگاه کرد. همه صندلیهای قطار پر بود. خیلی از مسافران هم، سر پا دستگیره ها را گرفته بودند. جوانی با چهره گند گون، در کنار در، برخلاف قانون، سیگار میکشید. دو دختر جوان با شادی و هیجان. درباره خودشان صحبت می کردند. جلوتر، جوانی پسر بچه اش را سرزنش میکرد و باز هم دورتر. مردی روزنامه می خواند. بالای سر او، یک آگهی نصب شده بود که از سیبهای فلوریدا، تعریف میکرد.
توپه لو، به مردی که روزنامه می خواند، نگاه کرد و دوباره با موجی شدیدتر. احساس ترس کرد. چیزی شبیه وحشت. با دقت، به مسافری که در جلو شسته بود، نگاه کرد. چه کسی است؟
مرد سیه چرده با موهای جوگندمی بود که جمجمه ای گرد، فرقی پریشان و کم پشت، پوستی پژمرده و رنگ پریده، خطهای چهره ای بی حالت و گردنی چاق داشت و کت قهوه ای راه راهی پوشیده بود. وقتی تو په لو او را نگاه می کرد، مرد مگسی را که روی شقیقه چپش نشسته بود، از خود دور می کرد و به آرامی، با تکان قطار تلو تلو می خورد. روزنامه ای را که می خواند، عمودی گرفته بود. روزنامه! عجب، این شماره روزنامه، مال ماه مارس بود.
توپولو، دوبارد و به سرعت، نظری به دور و بر خود انداخت. روزنامه ای روی زانوهای نفر کنار او بود، ولی این روزنامه تاریخ امروز را داشت. توپه‌لو، به مسافرای که پشت سرش بودند. نگاه کرد. جوانی صفحه ورزشی روزامه تراس کریپت: را می خواند. تاریخ این روزنامه، چهارم مارس بود. توپه‌لو به سرعت و با دقت. دور و بر خود را پایید. نزدیک به ده نفر از مسافران، روزنامه یک ماه و نیم پش را

مـی خواندنـد. تـو پـه لـو از جـای خـود پریـد. وقتـی ریاضیـدان، بابـی ادبـی و بـدون توجـه بـه نفـر پهلویـی خـود فشـار داد تـا بـه طـرف دیگـر واگـن بـرود، همسـایه اش بـه آرامـی ناسـزاگفت.

وقت توپـه لـو بـه انتهـا دیگـر واگـن رسـید، یکبـاره طنـاب علامـت را کشـید. صـدا گـوش خـراش ترمـز بلنـد شـد و قطـار ایسـتاد. مسـافران، بـا خشـم و عصبانـت، بـه «تـو پـه لـو خیـره شـدند. در انتهـا دیگـر واگـن در بـاز شـد و مـرد لاغـر و بلنـد بـه درون واگـن پریـد.

. دورکین؟

بلیـت فـروش ایسـتاد و دهانـش از تعجـب بـاز مانـده بـود.

توپه‌لـو، در حـال کـه مـی کوشـید بـا فریـاد خـود، غرغـر مسـافران ناراضـی را بپوشـاند، گفـت:

.دورکیـن، حادثـه ای جـدی اسـت. فـوری (هالاخـر) را بخواهیـد؟

دور کیـن، چهـار بـار طنـاب علامـت را کشـید و سـر آخـر پرسـید:

. چه اتفاقی افتاده؟

تو په لو، صدا او را نمیشنید. ولی پرسید:

. «دورکین» شما کجا بودید؟

در چهره بلت فروش، حالت شگفت پیدا شد.

– من در واگن کناری بودم. ول چه پیش ...

توپـه لـو، نگذاشـت حرفـش را تمـام کنـد. همـان طـور کـه بـه سـاعتش نـگاه میکـرد رو بـه مسـافران کـرد و فریـاد زد:

. امـروز هفدهـم مـاه مـه اسـت و حـالا، سـاعت نـه و ده دقیقـه صبح

حـرف او، بـا سـکوت حیـرت آوری برخـورد کـرد. مسـافران شـگفت زده بـه هـم نـگاه میکردنـد. تـو پـه لـو فریـاد زد:

. بـه تاریـخ روزنامـه هـای خـود نـگاه کنیـد. روزنامـه هاتـان!

مسـافران بـا هیاهـو او را هـو کردنـد. و وقتـی بـه روزنامـه هـای یکدیگـر نـگاه کردنـد، هیاهـوی آنهـا فروکـش کـرد. توپه‌لـو، شـانه دورکیـن را گرفـت و او را بـه انتهـای واگـن بـرد و از او پرسـید:

. چه ساعتی است؟

دورکین به ساعتش نگاه کرد و گفت:

. هشـت و بیسـت و یـک دقیقـه. تـو پـه لـو بـا سـر در جلـو را نشـان داد و گفـت:

– بـاز کنیـد. مـرا بیـرون ببریـد. ایـن جـا تلفـن کجاسـت؟

دورکیـن، بـی چـون و چـرا، دسـتور توپـه لـو را اجـرا کـرد و تلفـن را، صـد قـدم آن طـرف تـر، در فرورفتگـی تونـل، بـه او نشـان داد. «توپـه لـو، پاییـن پریـد و در راه باریـک بیـن قـار و دیـوار تونـل، شـروع بـه دویـدن کـرد. گوشـی تلفـن را برداشـت و فریـاد زد:

. مدیر کل را می خواهم، مدیر کل را

وقتـی منتظـر وصـل شـدن تلفـن بـود، در عقـب آنهـا، پشـت نـور قـرز چـراغ راهنمـا، قطـار دیگـری ایسـتاده بـود. دیـوار تونل بانورافکـن روشـن بـود. توپه‌لـو دیـد کـه چگونـه از طـرف دیگـر قطـار، هالاخـر میدود.

. خواهش میکنم وایت را به من بدهید، فورا!

پـس چـرا وصـل نمـی کننـد؟ مـی شـنید کـه سـر و صـدای نارضایتـی در قطـار، اوج مـی گیـرد. نشـانه هـای وحشـت و خشـم را میدیـد. فریـاد زد:

– الـو، الـو! وضـع اضطـراری اسـت! خواهـش میکـن آقـای وایـت، فـوراً صحبـت کنـد.

سـر انجـام. از طـرف دیگـر سـیم، صدایـی شـنیده شـد.

.بـه مـن بفرماییـد. وایـت، الان گرفتـار اسـت.

توپه‌لـو فریـاد زد:

. قطـار هشـتاد و شـش پیـدا شـده. درسـت بیـن ایسـتگاه مرکـزی و ایسـتگاه هـاروارد. نمیدانـم چطـور پیـش آمـد. مـن در ایسـتگاه (چارلـز سـتریت)، ده دقیقـه قبـل در آن نشسـتم

در طـرف دیگـر سـیم، کسـی بـه زحـت نفـس میکشـید و بـا صـدای گرفتـه ای گفـت:

. پس مسافران؟

تو په لو پاسخ داد:

. تـا ایـن جـا، همـه سـالم و زنـده انـد. بعضـی هـا بایـد در ایسـتگاههای کنـدال، و مرکـزی، پیـاده شـده باشـند.

ـ آنها کجا بوده اند؟

توپه‌لـو بـا تردیـد دسـتش را پاییـن آورد و گوشـی تلفـن را سـرجایش گذاشـت و بـه طـرف در بـاز شـده واگـن پریـد. سـرانجام، بـه هـر زحمـی بـود،

توپه‌لـو توانسـت مسـافران را آرام کنـد. نظـم دوبـاره برقـرار شـد و قطـار توانسـت راه خـود را بـه طـرف ایسـتگاه هـاروارد ادامـه دهـد. در سـکوی ایسـتگاه، گروه پلیـس انتظـار مـی کشـید کـه بلافاصلـه، همـه مسـافران را زیـر نظـر گرفتنـد. وایـت هـم پیـش از رسـیدن قطـار، بـه ایسـتگاه آمـده بـود و توپه‌لـو، خیلـی زود، او را در سـکوی ایسـتگاه شـناخت

وایـت کـه چهـره ای خسـته داشـت، مسـافران را رهـا کـرد و از توپه‌لـو، پرسـید

. مثـل اینکـه همـه چیـز درس و منظـم اسـت؟ ریاضیـدان پاسخ داد:

. بلـه، کامـلا. و جالـب ایـن اسـت کـه اینهـا خودشـان نمـی داننـد در تمـام ایـن مـدت کجـا بـوده انـد؟ مدیـر کل پرسـید

. می توانم با پروفسور ترنبول، آشنا شوم؟

. نـه. او بایـد در ایسـتگاه د کنـدال، از قطـار خـارج شـده با شد .

وایت، گفت:

. خیلـی باعـث تأسـف اسـت. بـرای مـن خیلـی مهـم اسـت کـه بتوانـم بـا پوفسـور صحبـت کنـم.

توپه‌لو، گفت:

. مـن هـم همیـن طـور، در ضمـن، حـالا وقـت ان اسـت کـه خـط بویلسـتون بسـته شـود.

وایت، پاسخ داد:

. نـه، دیـگ دیـر شـده اسـت. بیسـت و پنـج دقیقـه قبـل، قطـار شـماره ۱۴۳، بیـن ایسـتگاههای السـتونه و دوچسـت ، گـم شـده اسـت.

توپـه لـو جـرأت نکـرد بـه صـورت وایـت، نـگاه کنـد و چشـمانش را بـه پاییـن دوخـت. وایـت، تـکا کـرد

. به هر ترتیبی هست، باید ترنبول، را ببینم.

ریاضـی دان، سـرانجام، سـرش را بلنـد کـرد. بـه صورتـی سـاختگی لبخنـد زد و پرسـید:

.شـما فـک مـی کنیـد، در ایسـتگاه ، کنـدال، از قطـار خـارج شـده باشـد؟ مـردی کل پاسـخ داد:

. البته، ولی حالا کجاست؟

داخل هر سطر و ستون و مربع های ۳*۳ اعداد یک تا ۹ را جوری بچینید که تکراری وجود نداشته باشد .

3				8				4				6				1				8
	4			5			1						5			8			4	
			3		4										7		4			
		4				8								9				8		
7	8			3			9	1				7	3			9			1	2
		9				5								1				7		
			2		8					4					1		5			
	1			4						1						6			2	
6				9					8		2					3				6
								6				7								
						7	4			9			2	8						
								5				9								
7				4					4		3					1				6
	3			8						2						5			4	
			1		5					5					2		9			
		9				8								8				1		
4	8			3			6	5				2	6			9			7	4
		5				2								3				5		
			8		7										6		1			
	1			5			2						7			4			2	
8				6				9				5				7				3